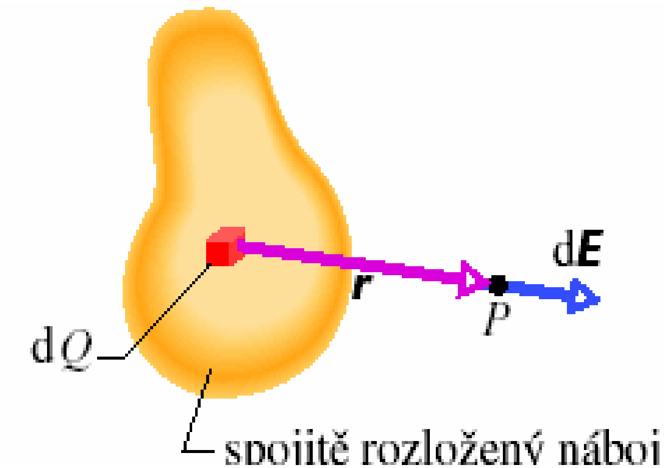
MAGNETICKÉ POLE ELEKTRICKÉHO PROUDU

Budeme se zabývat výpočtem magnetického pole vytvořeného danou konfigurací elektrických proudů (podobně jako určení elektrického pole vytvořeného daným rozložením elektrických nábojů).

V elektrickém poli – Coulombův zákon

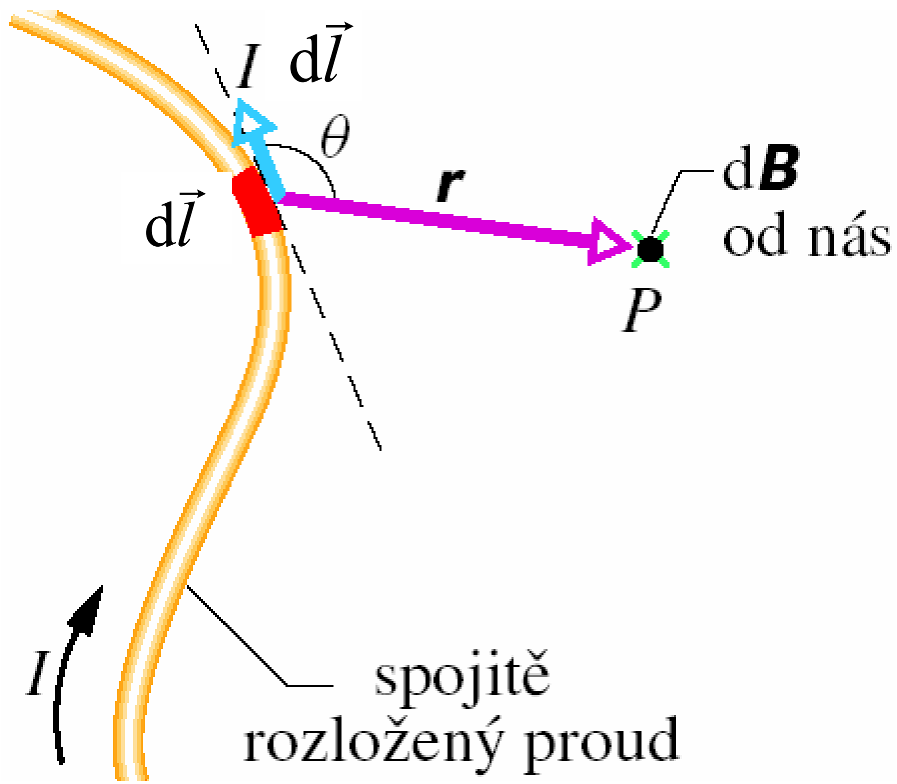


$$\boxed{\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\,\vec{r}^{\,0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{r^3}\,\vec{r}}$$

(Rovnice představuje zákon „převráceného čtverce“ - $\mathrm{d}\vec{E}$ závisí na převrácené hodnotě r^2.)

Pozn: Ve jmenovateli je r^3, neboť vektor $\vec{r}^{\,0}$ je vyjádřen vztahem $\vec{r}^{\,0} = \dfrac{\vec{r}}{r}$.

V magnetickém poli – Biotův-Savartův-Laplaceův zákon



Vodičem prochází proud – rozdělen na délkové elementární části $\mathrm{d}\vec{l}$.

Proudovým elementem značíme $I\mathrm{d}\vec{l}$.

V bodě *P* je **indukce magnetického pole** vytvořeného tímto elementem

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}}$$

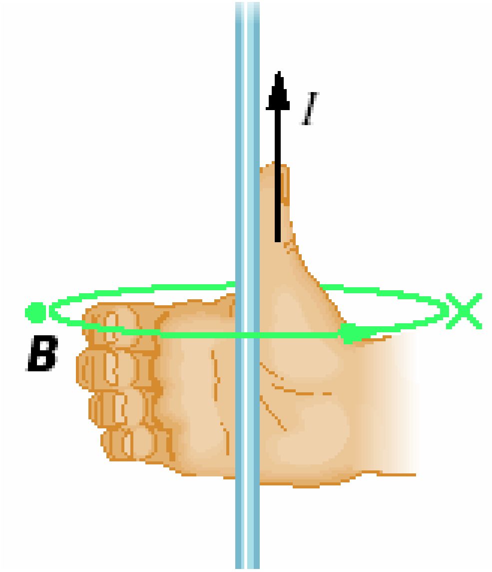
o velikosti $$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l\,\sin\alpha}{r^2},$$

kde μ_0 je **permeabilita vakua** – magnetická konstanta;

hodnota $$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{T.m.A^{-1}} = 1{,}26.10^{-6}\ \mathrm{T.m.A^{-1}}$$

Magnetické pole vytvořené celým vodičem (princip superpozice)

$$\boxed{\vec{B} = \int_{(c)} \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(c)} \frac{I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}}$$



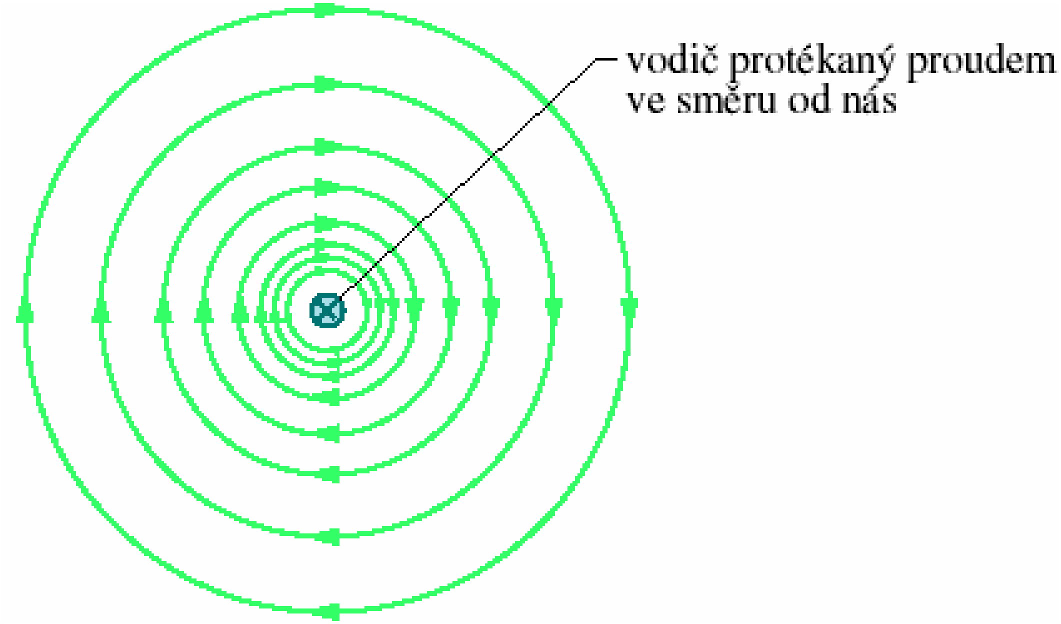
Směr magnetické indukce je daný vektorovým součinem $I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}$.

Je kolmý na rovinu určenou vektory $\mathrm{d}\vec{l}$ a $\vec{r}$.

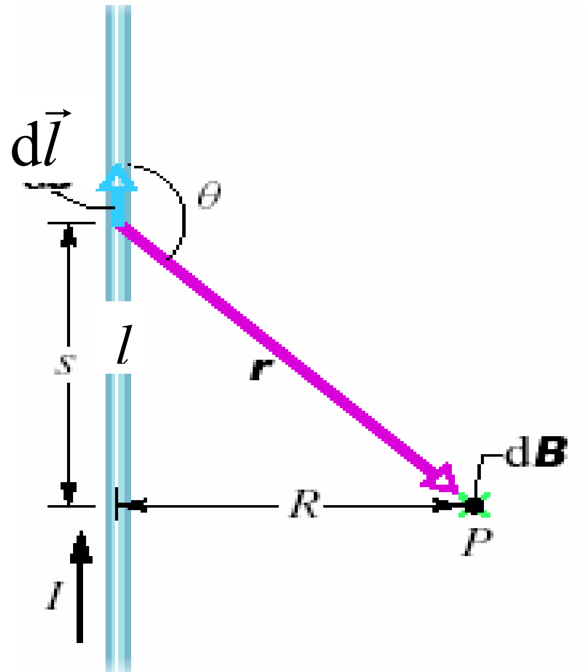
Orientaci určujeme **pravidlem pravé ruky:**

palec pravé ruky ve směru proudového elementu a zahnuté prsty ukazují směr magnetických indukčních čar.

a) Magnetické pole dlouhého přímého vodiče



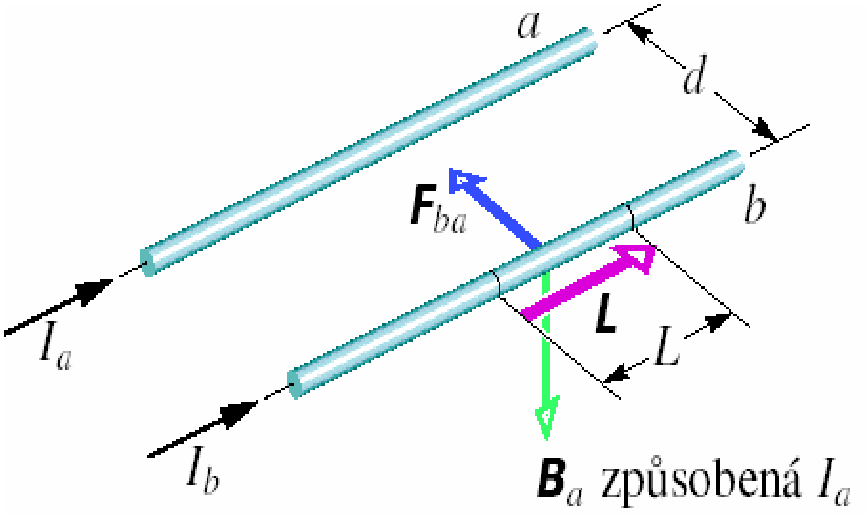
Indukční čáry vektoru magnetické indukce $\vec{B}$ mají tvar soustředných kružnic kolem vodiče (viz obrázek)



<u>*Bez odvození:*</u> v kolmé vzdálenosti R od nekonečně dlouhého přímého vodiče protékaným proudem I má magnetická indukce velikost

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}}.$$

Silové působení dvou rovnoběžných vodičů



Vodičem ***a*** protéká proud I_a a vytváří kolem vodiče magnetické pole.

Indukce B_a tohoto pole má ve vzdálenost ***d*** velikost:

$$\boxed{B_a = \frac{\mu_0 I_a}{2\pi d}}$$

Je-li do tohoto pole vložen jiný vodič, působí na něj pole vodiče ***a*** silou.

Magnetická síla působící na délku L vodiče b se vypočítá podle vztahu

$$\vec{F}_{ba} = I_b \vec{L} \times \vec{B}_a \ .$$

Vzhledem k tomu, že $\vec{L} \perp \vec{B}_a$, je velikost síly

$$F_{ba} = I_b L B_a \underbrace{\sin 90^\circ}_{1} = I_b L B_a = I_b L \frac{\mu_0 I_a}{2\pi d} \ .$$

Síla, kterou na sebe působí dva rovnoběžné dlouhé vodiče, je přímo úměrná součinu proudů jimi procházejících a nepřímo úměrná vzdálenosti vodičů.

$$\boxed{F_{ba} = \frac{\mu_0 I_a I_b}{2\pi d} L}$$

Síla je

a) přitažlivá, je-li směr proudů ve vodičích souhlasný,
b) odpudivá, je-li směr proudů ve vodičích nesouhlasný.

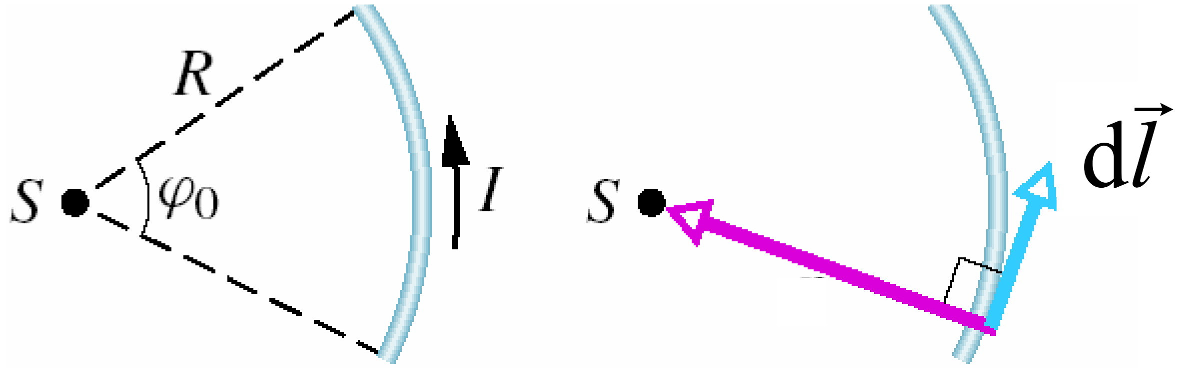
Vztah je použit při definici ampéru (základní jednotka v soustavě SI).

Pro $L = 1$ m, $d = 1$m, $I_a = I_b = 1$A, je velikost síly $F_{ba} = \frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7}$ N

1 ampér je proud, který při stálém průtoku dvěma rovnoběžnými přímými velmi dlouhými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu, umístěnými ve vzdálenosti 1 m od sebe ve vakuu, vyvolává mezi vodiči sílu $2 \cdot 10^{-7}$ N na 1 metr délky.

b) Magnetické pole ve středu *S* kruhového oblouku

Vyjádříme nejprve příspěvek magnetické indukce vytvořený proudovým elementem a integrací získáme výslednou magnetickou indukci vytvořenou všemi elementy celého vodiče.



V bodě S vytváří každý proudový element $I\,\mathrm{d}\vec{l}$ magnetické pole, jehož indukce má velikost

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l\sin 90^\circ}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l}{R^2}\,, \qquad \text{kde} \quad \mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\varphi\ .$$

Velikost celkové indukce ve středu oblouku obdržíme integrací:

$$B = \int_{(c)} \mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(c)} \frac{I R \,\mathrm{d}\varphi}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{\varphi_0} \mathrm{d}\varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{\mu_0 I \varphi_0}{4\pi R}}$$

Pro kruhovou uzavřenou smyčku je $\varphi_0 = 2\pi$

a magnetická indukce ve středu smyčky má velikost

$$B = \frac{\mu_0 I \, 2\pi}{4\pi \, R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2R}}.$$

AMPÉRŮV ZÁKON

V elektrickém poli – Gaussův zákon:

$$\boxed{\oint_{(S)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_c}{\varepsilon_0}}\ .$$

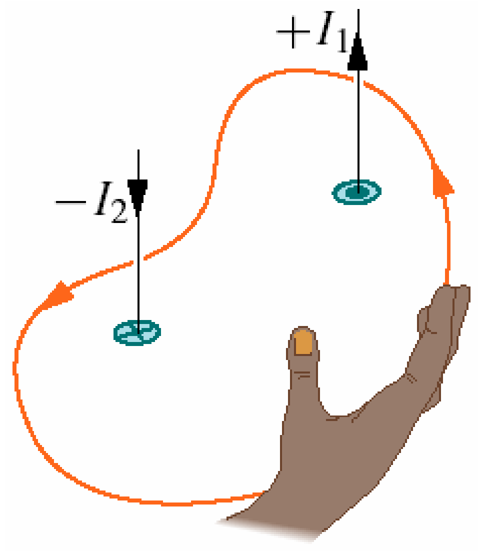
Volíme vhodnou uzavřenou Gaussovu plochu obklopující náboje.

V magnetickém poli – Ampérův zákon (zákon celkového proudu):

$$\boxed{\oint_{(c)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_c}\ .$$

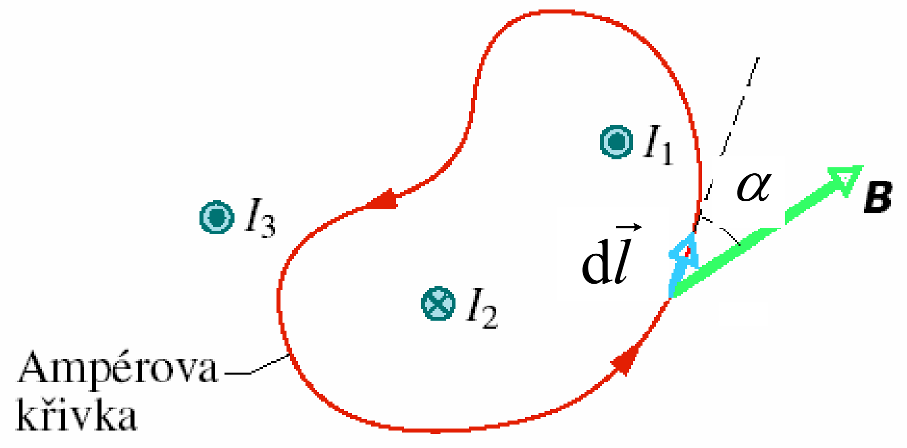
Volíme vhodnou uzavřenou Ampérovu křivku obepínající vodiče s proudem.

Integrál na levé straně – *cirkulace vektoru* $\vec{B}$ podél uzavřené křivky (*c*). Proud I_c na pravé straně rovnice je *celkový proud* (součet všech proudů) protékající plochou, kterou ohraničuje Ampérova křivka (*c*).



Orientace Ampérovy křivky – volíme směr proti chodu hodinových ručiček.

Pomocí pravidla pravé ruky pak určíme, který směr proudu, procházející plochou obepnutou Ampérovou křivkou, považujeme za kladný a který za záporný.



Na obrázku vpravo:

$$\oint_{(c)} B\cos\alpha\,\mathrm{d}l = \mu_0(I_1 - I_2)$$

Proud I_3 neprotíná plochu, jejíž hranicí je zvolená křivka $\rightarrow$ ***nezapočítává se***

Celkový proud obepnutý křivkou je $I_c = I_1 - I_2$,

proud I_3 přispívá k celkové magnetické indukci, ale není obepnut Ampérovou křivkou, tj. **příspěvek k cirkulaci** $\vec{B}$ **je nulový**.

(Podobně u náboje ležícího vně Gaussovy plochy, který také neovlivňuje tok vektoru intenzity uzavřenou plochou.)

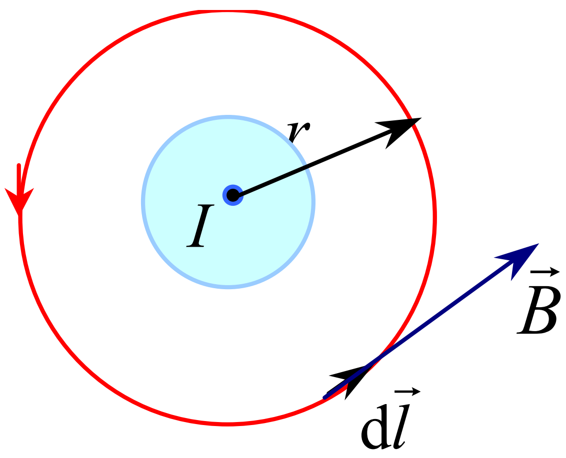
Ampérův zákon celkového proudu:

Cirkulace vektoru magnetické indukce podél libovolné uzavřené křivky (*c*) je rovna $\mu_0$násobku proudu, který protéká plochou (*S*) ohraničenou touto křivkou.

Poznámka: Ampérův zákon (stejně jako Gaussův) je výhodné používat při řešení úloh se symetrií rovinnou, válcovou nebo kulovou.

UŽITÍ AMPÉROVA ZÁKONA

a) Magnetické pole vně dlouhého přímého vodiče



Indukční čáry – tvar soustředných kružnic, magnet. pole má válcovou symetrii $\Rightarrow$

Ampérova křivka je soustředná kružnice.

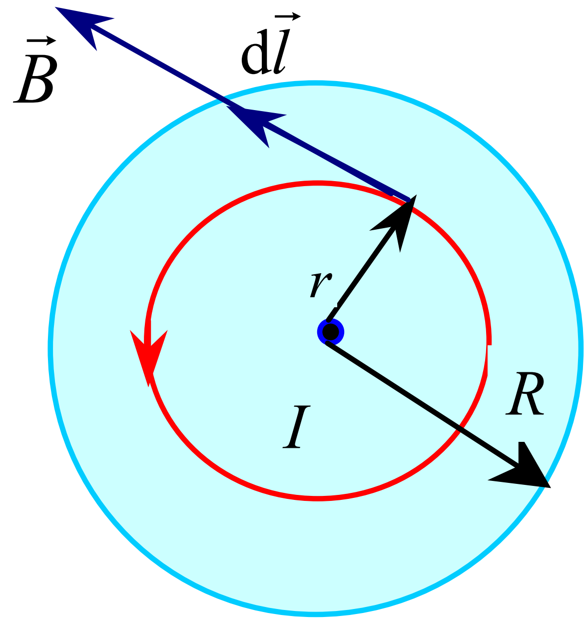
Vektory $\vec{B} \uparrow\uparrow \mathrm{d}\vec{l}$, proto platí

$$\oint_{(c)} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{(c)} B\,\mathrm{d}l \underbrace{\cos 0^\circ}_{1} = B\oint_{(c)} \mathrm{d}l = B\,2\pi r$$

Ampérův zákon: $$\oint_{(c)} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_c$$

Porovnáním: $B\,2\pi r = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}}$ Stejně jako z B.-S.-L. zákona

b) Magnetické pole uvnitř dlouhého přímého vodiče



Magnet. pole má válcovou symetrii $\Rightarrow$ ***Ampérova křivka*** je soustředná kružnice o poloměru $r < R$.

Ampérův zákon: $$\oint_{(c)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_c$$

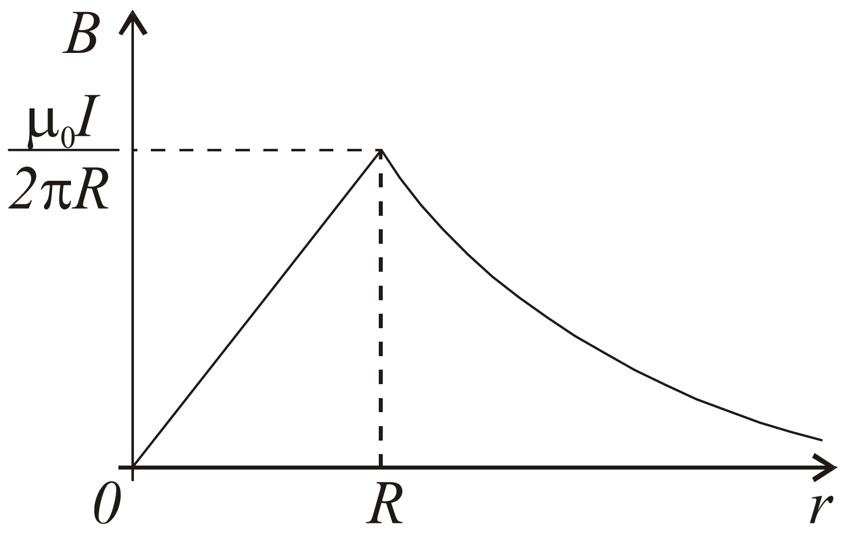
I_c je proud uvnitř Ampérovy křivky

Vektory $\vec{B} \uparrow\uparrow \mathrm{d}\vec{l}$, takže $\oint_{(c)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{(c)} B \,\mathrm{d}l \cos 0^{\mathrm{o}} = B \int_0^{2\pi r} \mathrm{d}l = B\, 2\pi r$.

Ve vodiči je hustota elektrického proudu $J = \text{konst.}$ $\Rightarrow$ $I_c = I \dfrac{\pi r^2}{\pi R^2} = I \dfrac{r^2}{R^2}$,

po dosazení: $B\, 2\pi r = \mu_0 I \dfrac{r^2}{R^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r}$.

Průběh indukce:



Magnetická indukce vodiče o poloměru R, kterým protéká elektrický proud o konstantní hustotě proudu nabývá následujících hodnot

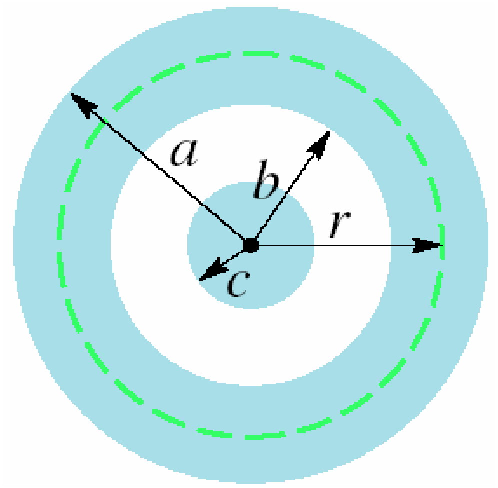
- ✓ uvnitř vodiče: pro $r = 0$ (ve středu) je $B = 0$;

  pro $r < R$ vzrůstá lineárně se vzdáleností od osy vodiče;

- ✓ na povrchu vodiče: pro $r = R$ je $B = B_{max}$;
- ✓ vně vodiče: pro $r > R$ klesá nepřímo úměrně se vzdáleností od osy.

HRW 30.47

Na obrázku je řez dlouhým přímým koaxiálním kabelem. Každým z vodičů protéká co do velikosti stejný, ale co do směru opačný proud I, homogenně rozložený v jejich průřezu. Odvoďte výrazy pro závislost $B(r)$ v intervalech: a) $r < c$, b) $c < r < b$, c) $b < r < a$, d) $r > a$.



Protože výsledné magnetické pole bude válcově symetrické, použijeme k řešení Ampérův zákon celkového proudu

$$\oint_c \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_c \quad . \tag{1}$$

Ampérovou křivkou bude ve všech případech kružnice ležící v rovině kolmé na kabel se středem na ose kabelu.

Pak pro všechny případy platí, že

$$\oint_{(c)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{(c)} B \,\mathrm{d}l \cos 0^\circ = B \int_0^{2\pi r} \mathrm{d}l = B\, 2\pi r \,. \tag{2}$$

a) $r < c$

Plochou, kterou obepíná Ampérova křivka, prochází proud I_1, který je jen částí celkového proudu I procházejícího kabelem. Poněvadž je proudová hustota J v celém průřezu konstantní, bude platit

$$J = \frac{I_1}{\pi r^2} = \frac{I}{\pi c^2} \qquad \Rightarrow \qquad I_1 = I\frac{r^2}{c^2} \;\; (= I_\mathrm{c}) \tag{3}$$

Po dosazení rovnic (2) a (3) do rovnice (1) dostaneme

$$B 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{c^2},$$

odkud je pro magnetickou indukci

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi c^2}\, r\, .$$

Magnetická indukce uvnitř jádra koaxiálního kabelu vzrůstá lineárně se vzdáleností od osy kabelu.

b) $c < r < b$

Ampérova křivka bude v tomto případě obepínat celá proud I, tzn., že bude platit

$$B\,2\pi r = \mu_0 I \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Magnetická indukce bude mezi vodiči kabelu klesat hyperbolicky s rostoucí vzdáleností od osy kabelu.

c) $b < r < a$

Ampérova křivka bude nyní obepínat jednak celý proud I tekoucí jedním směrem a část proudu $-I$, který protéká vnějším vodičem, ale opačným směrem (označíme I_2). Proudová hustota je v obou kabelech konstantní, takže je

$$J = \frac{I_2}{\pi\left(r^2 - b^2\right)} = \frac{I}{\pi\left(a^2 - b^2\right)} \qquad \Rightarrow \qquad I_2 = I\,\frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2}.$$

Dosazením do Ampérova zákona dostaneme

$$B\,2\pi r = \mu_0\left(I - I_2\right) = \mu_0 I\left(1 - \frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2}\right) = \mu_0 I\,\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}$$

Pro hledanou indukci je

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}.$$

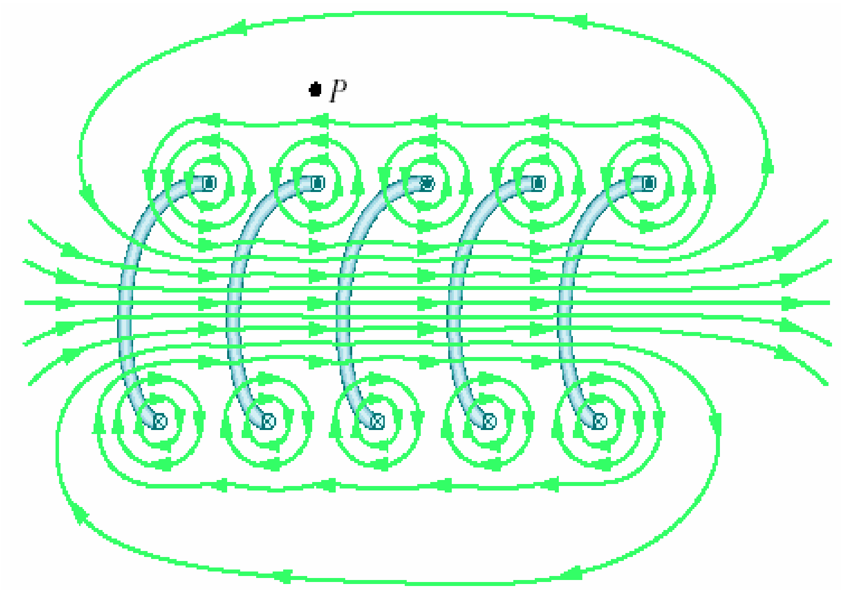
Magnetická indukce uvnitř vnějšího kabelu s rostoucí vzdáleností klesá a pro $a = r$ *je nulová*.

d) $r > a$

Vně koaxiálního kabelu je celkový proud obepnutý Ampérovou křivkou roven součtu obou proudů, tj. $I_c = I - I = 0$, *proto i magnetická indukce vně kabelu je nulová* $B = 0$.

c) **Magnetické pole solenoidu**

Solenoid je dlouhá, hustě vinutá cívka, jejíž délka l je >> než její průměr d. Počet závitů na jednotku délky je $n = \dfrac{N}{l}$.

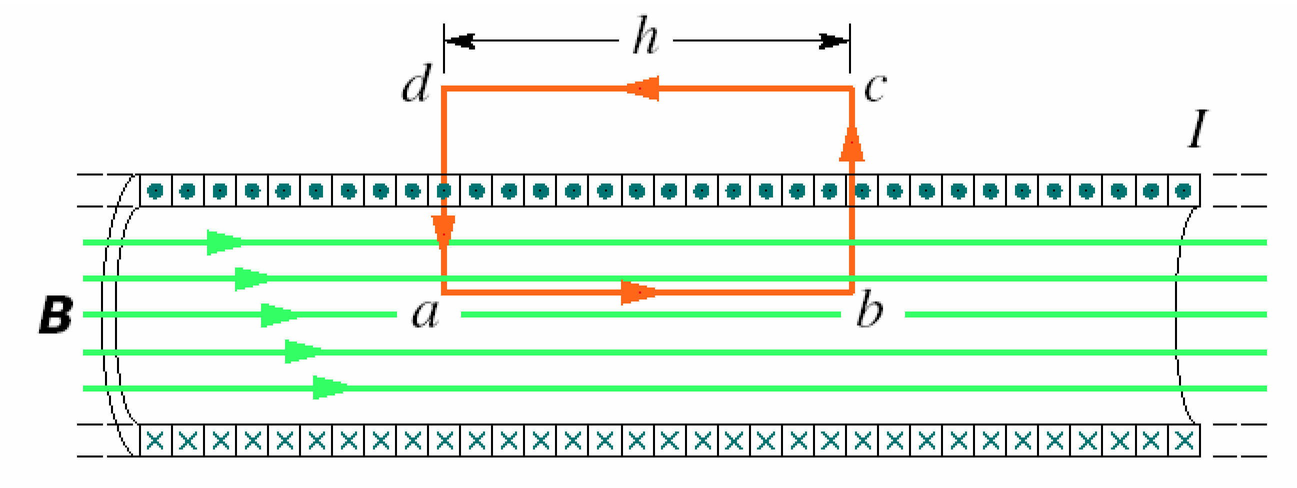


Indukční čáry řídce vinutého solenoidu.

Poblíž osy se pole jednotlivých závitů skládají v magnetické pole ve směru osy. Husté rovnoběžné indukční čáry značí pole silné a homogenní.

Vně solenoidu jsou indukční čáry vzdálené – magnetické pole je velmi slabé. Orientace pole uvnitř solenoidu – *pravidlo pravé ruky.*

Pro jednoduchost – **ideální solenoid** (nekonečně dlouhý, hustě vinutý, rovnoměrné rozdělení proudu na povrchu solenoidu, uvnitř solenoidu $\vec{B}$ homogenní, vně rovno $\vec{B}$ = 0)



<u>Ampérova křivka</u> – obdélník $abcd$.

<u>Ampérův zákon</u>

$$\oint_{(c)} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_c$$

Cirkulace vektoru $\vec{B}$ podél Ampérovy křivky:

$$\int_{(c)} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_b^c \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_c^d \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_d^a \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = Bh + 0 + 0 + 0 = Bh$$

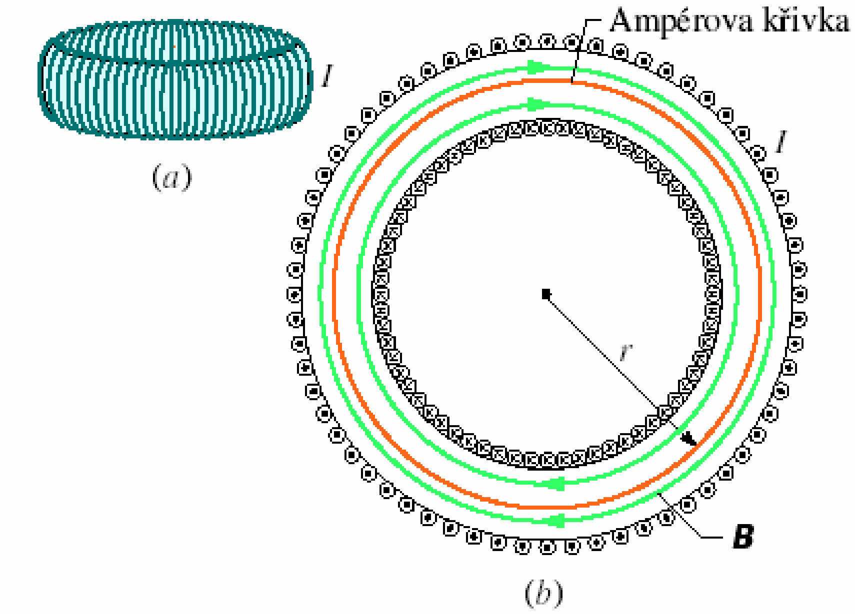
Celkový proud : $I_c = nhI = \frac{N}{l} hI$,

Po dosazení do A. z. $Bh = \mu_0 \frac{N}{l} hI \Rightarrow \boxed{B = \mu_0 \frac{NI}{l}}$

Indukce mg. pole na ose solenoidu – platí pro ideální solenoid.

d) Magnetické pole toroidu

Toroid (zjednodušeně) – solenoid stočený do tvaru prstence.



Indukční čáry jsou soustředné kružnice (zeleně) uvnitř toroidu.

Ampérova křivka je kružnice o poloměru r (červeně).

Ampérův zákon $\oint\limits_{(c)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_c$

Cirkulace vektoru $\vec{B}$ podél Ampérovy křivky: $\int\limits_{(c)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = B \int\limits_{0}^{2\pi r} \mathrm{d}l = B 2\pi r$

Celkový proud: $I_c = NI$, po dosazení do A. z. : $\boxed{B = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r}}$.

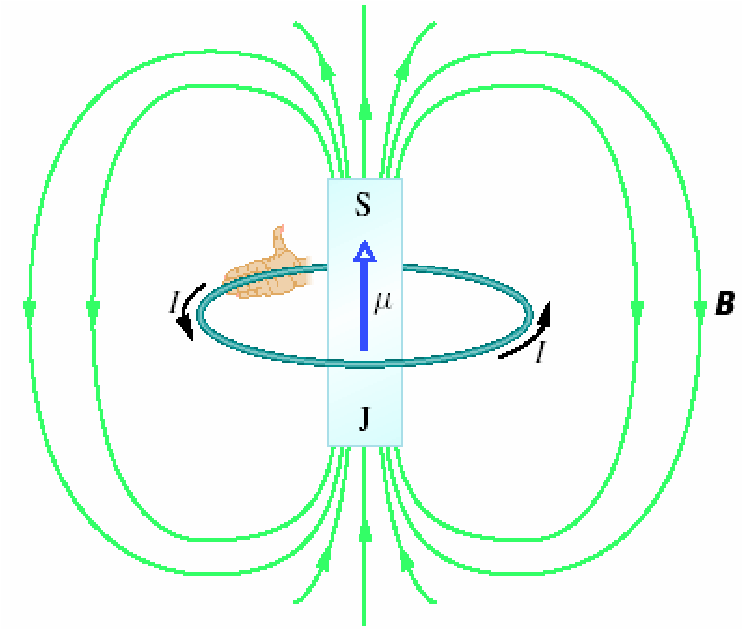
Vztah platí pro mg. indukci uvnitř toroidu. Mimo ideální toroid je $B = 0$.

CÍVKA JAKO MAGNETICKÝ DIPÓL

Magnetický dipól – krátká cívka (kterou protéká elektrický proud) ve vnějším magnetickém poli.

Působí na ni ***silový moment*** $\boxed{\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}}$,

kde $\vec{\mu}$ je magnetický dipólový moment cívky (velikost je $N\,I\,S$, N – počet závitů, I – proud pro každý závit, S – plošný obsah každého závitu)



Pro nedostatek symetrie není možné řešit pomocí A. z. Použijeme B.-S. zákon a úlohu zjednodušíme: cívku nahradíme jediným kruhovým závitem se středem v počátku souřadnic a s osou shodnou s osou z. Magnet. indukci vypočítáme na ose závitu, tj. na ose z. ***Magnetická indukce*** na ose cívky

$\boxed{\vec{B}(z) = \dfrac{\mu_0 \vec{\mu}}{2\pi z^3}}$ a velikost $(\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{\mu})$ $\boxed{B(z) = \dfrac{\mu_0 NIS}{2\pi z^3}}$