KAPACITA

KONDENZÁTORY

ENERGIE ELEKTRICKÉHO POLE

DIELEKTRIKA

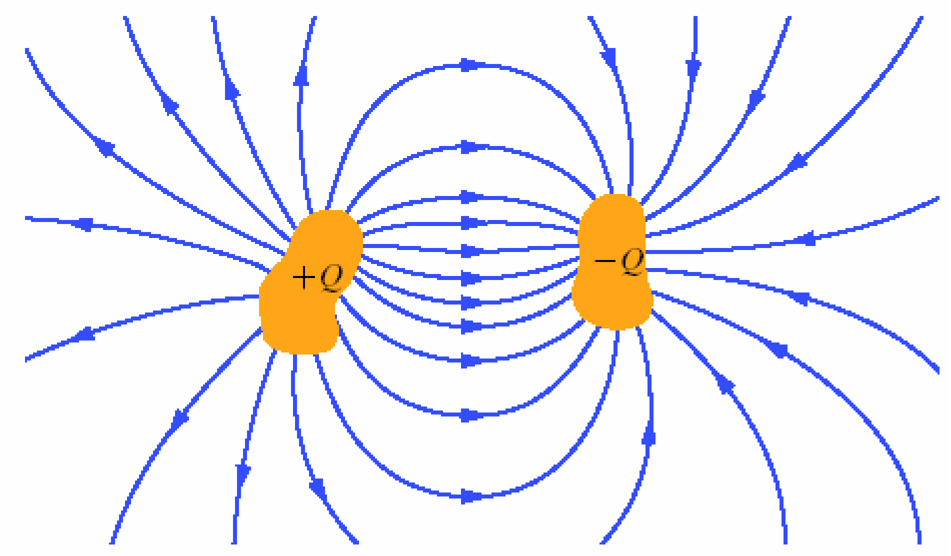
KAPACITA

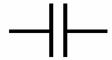
Kondenzátor

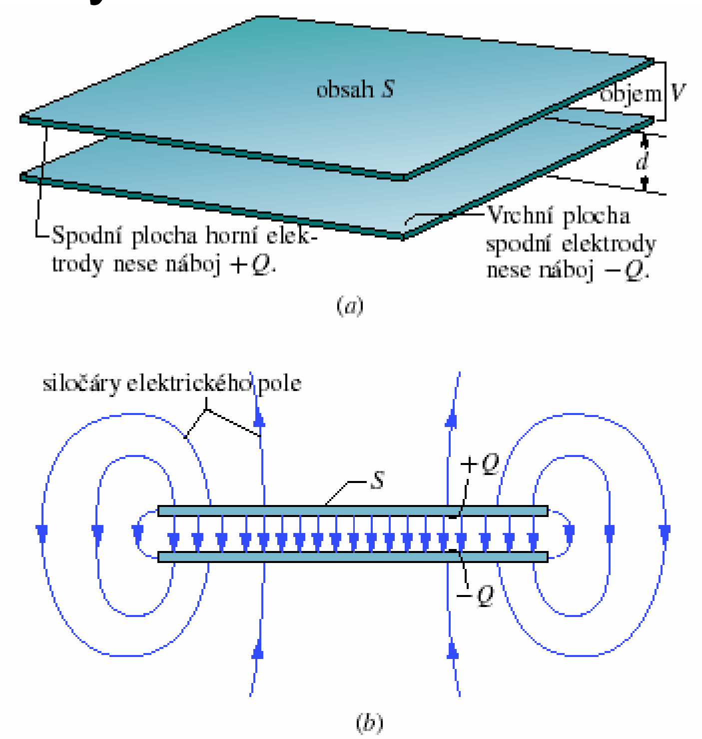
Mechanickou energii lze uchovat jako energii potenciální:
natažení pružiny, stlačení plynu, zvednutí tělesa, …
Energii elektrického pole lze uchovat v kondenzátorech.

Kondenzátor (obecně):

dva vodiče blízko sebe
ale elektricky izolovány.



Deskový kondenzátor 



Kapacita kondenzátoru

Náboj kondenzátoru Q:

Absolutní hodnota náboje jedné z elektrod.

Napětí na kondenzátoru U:

Absolutní hodnota rozdílu potenciálu jeho elektrod.

Náboj Q a napětí U jsou u každého kondenzátoru navzájem přímo úměrné

$$\boxed{Q = CU \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Q}{U}}$$

součinitel úměrnosti - **kapacita**

Kapacita

- pro daný kondenzátor je konstantní
- závisí pouze na geometrii kondenzátoru a jeho dielektriku

Jednotka

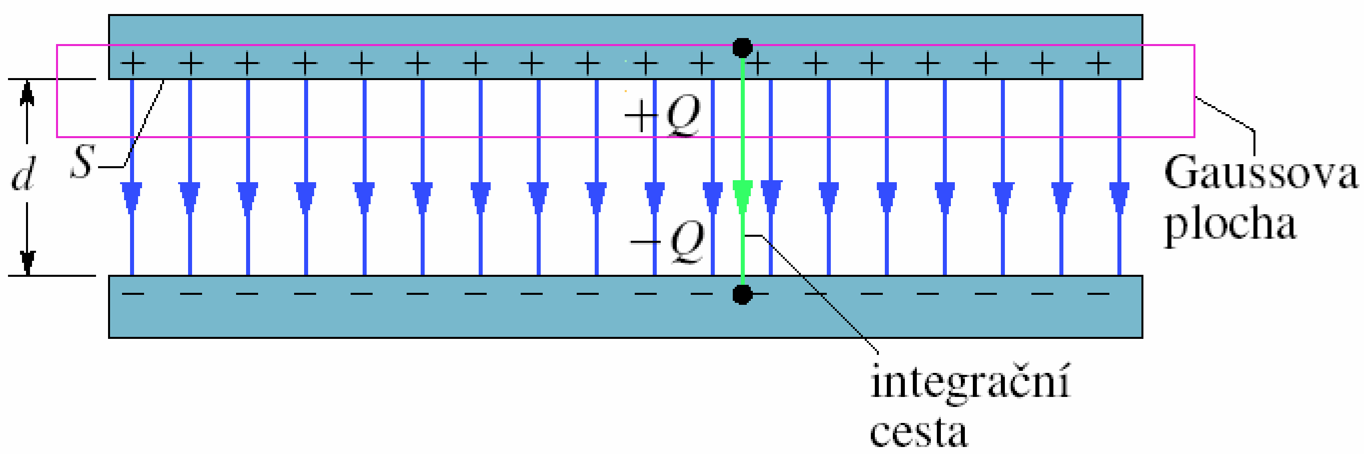
$[C]$ = 1 C.V^{-1} = 1F (1 Farad) Jednotka je příliš velká.

Častěji: mikrofarad (1 μF = 10^{-6}F), nanofarad (1 nF = 10^{-9}F), pikofarad (1 pF = 10^{-12}F)

Výpočet kapacity – obecný postup

1. Použijeme vztah $C = Q/U$. Předpokládáme, že na kondenzátoru je náboj Q, hledáme odpovídající napětí U.
2. K výpočtu napětí U budeme potřebovat elektrickou intenzitu $\vec{E}$. Získáme ji z Gaussova zákona $(\oint_S \vec{E}d\vec{S} = Q/\varepsilon_0)$.
3. Vypočítáme napětí na kondenzátoru, což je podle jeho definice absolutní hodnota rozdílu potenciálů mezi jeho elektrodami.
4. Integrační cestu budeme začínat vždy na kladné elektrodě.
5. $U_{\text{kond}} = \left|\varphi_{(-)f} - \varphi_{(+)i}\right| = \left|-\int_{(+)}^{(-)} \vec{E}d\vec{r}\right| = \left|-\int_{(+)}^{(-)} \underbrace{Edr\overbrace{\cos 0^\circ}^{1}}_{\text{kladné}}\right| = \int_{(+)}^{(-)} Edr$, tedy: $\boxed{U_{\text{kond}} = \int_{(+)}^{(-)} Edr}$
6. Vypočítané napětí na kondenzátoru dosadíme do $C = \dfrac{Q}{U}$. Napětí bude záviset na náboji Q. Náboj se tedy vykrátí.

Deskový kondenzátor



Gaussův zákon

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = Q/\varepsilon_0$$

$$\int_S EdS\cos 0^\circ + 0 = Q/\varepsilon_0$$

$$E\int_S dS = Q/\varepsilon_0$$

$$ES = Q/\varepsilon_0$$

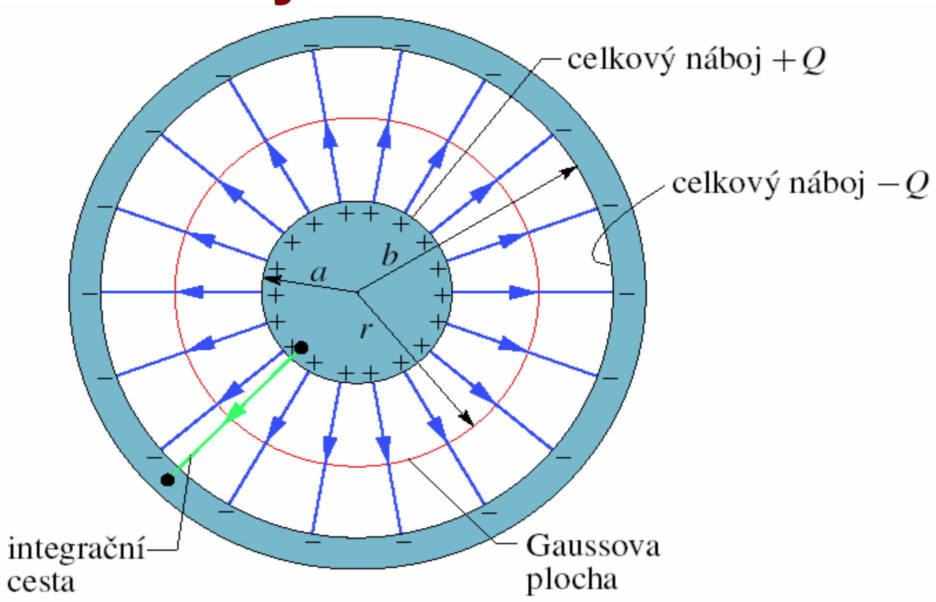
Intenzita elektrického pole $E = Q/\varepsilon_0 S$

Napětí na kondenzátoru $U = \int_{(+)}^{(-)} Edr = \int_{(+)}^{(-)} \frac{Q}{\varepsilon_0 S}dr = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\int_0^d dr = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$

Kapacita $C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{Qd/\varepsilon_0 S} = \frac{Q\varepsilon_0 S}{Qd} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad \text{(deskový kondenzátor)}}$$

Válcový kondenzátor



Gaussův zákon

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = Q/\varepsilon_0$$

$$\int_S EdS\cos 0^\circ + \underbrace{0}_{\text{základny}} = Q/\varepsilon_0$$

$$E\int_S dS = Q/\varepsilon_0$$

$$ES = Q/\varepsilon_0$$

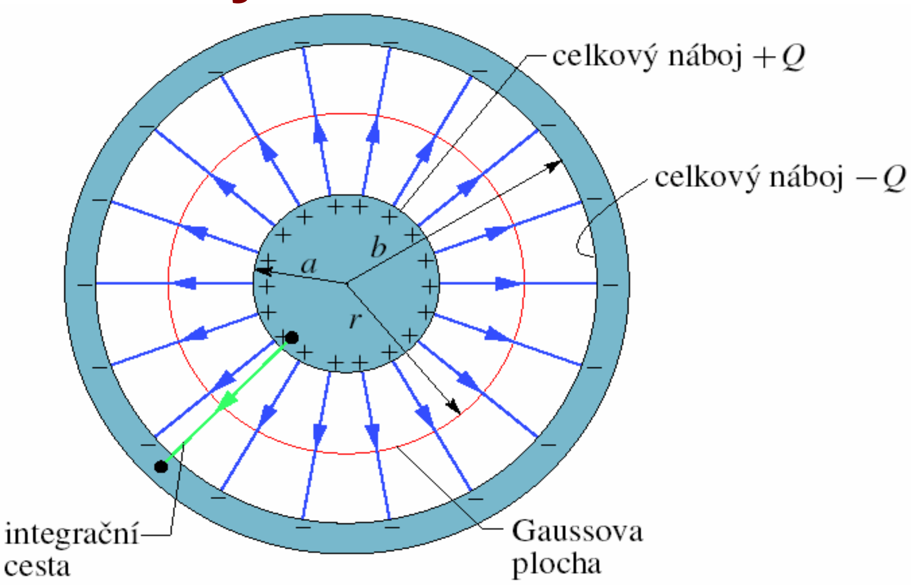
Intenzita elektrického pole $E = Q/\varepsilon_0 S = Q/\varepsilon_0 2\pi rL = Q/2\pi\varepsilon_0 Lr$

Napětí na kondenzátoru $U = \int_{(+)}^{(-)} Edr = \int_{(+)}^{(-)} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 Lr} dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{b}{a}$

Kapacita $C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{Q\ln(b/a)/2\pi\varepsilon_0 L} = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}$

$$\boxed{C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)} \quad \text{(válcový kondenzátor)}}$$

Kulový kondenzátor



Gaussův zákon

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = Q/\varepsilon_0$$

$$\int_S EdS\cos 0^\circ = Q/\varepsilon_0$$

$$E\int_S dS = Q/\varepsilon_0$$

$$ES = Q/\varepsilon_0$$

Intenzita elektrického pole $E = Q/\varepsilon_0 S = Q/\varepsilon_0 4\pi r^2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$

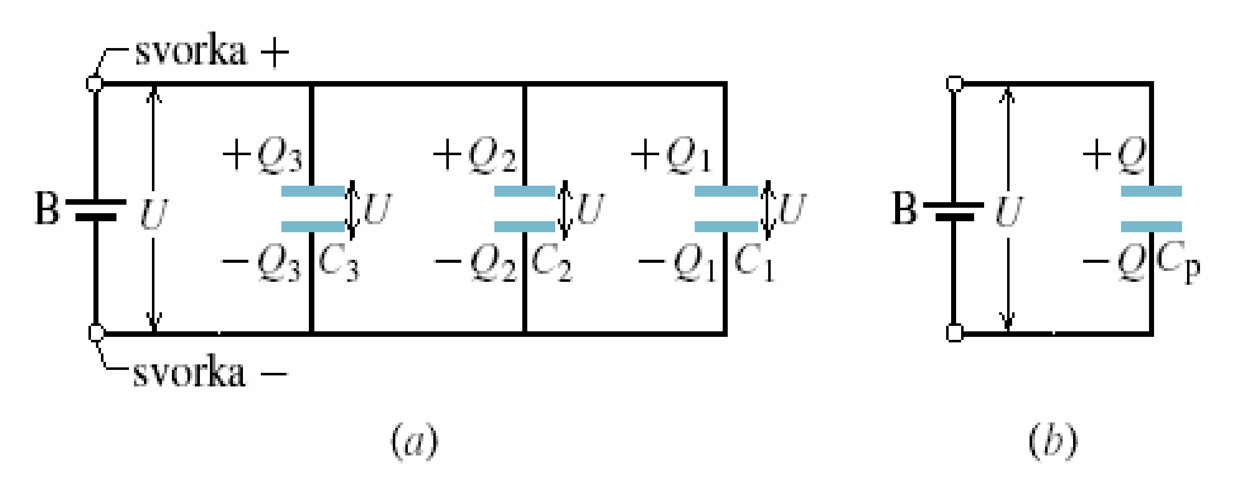
Napětí na kondenzátoru $U = \displaystyle\int_{(+)}^{(-)} Edr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$

Kapacita $C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{Q}{Q(b-a)/4\pi\varepsilon_0 ab} = 4\pi\varepsilon_0\dfrac{ab}{b-a}$

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a} \quad \text{(kulový kondenzátor)}}$$

ZAPOJENÍ KONDENZÁTORŮ

Paralelní



Při spojení kondenzátorů paralelně (vedle sebe) je napětí na celé skupině kondenzátorů stejné jako napětí na každém z nich.

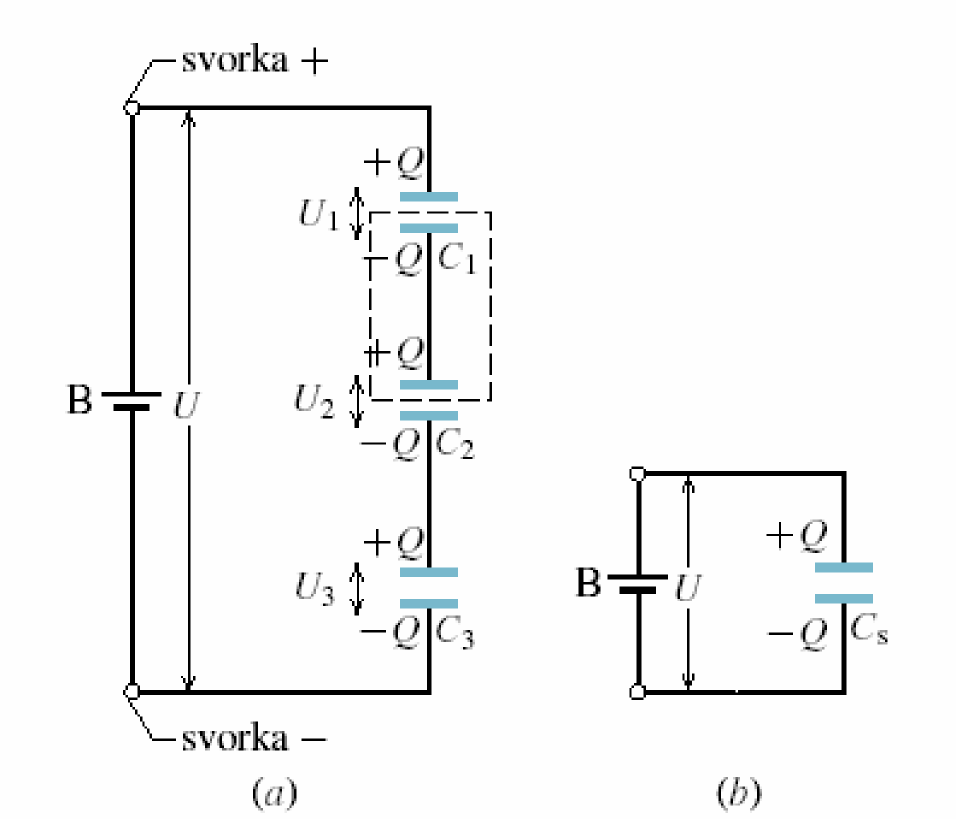
Celkový náboj soustavy:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1U + C_2U + C_3U = \underbrace{(C_1 + C_2 + C_3)}_{C_p}U$$

Kapacita soustavy je

$$C_p = \frac{Q}{U} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_p = C_1 + C_2 + C_3}$$

Sériové



Při spojení kondenzátorů do série (za sebou) je napětí na celé skupině kondenzátorů rovno součtu napětí na jednotlivých kondenzátorech. Na každém kondenzátoru – stejný náboj Q.

Celkové napětí na sériové kombinaci:

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q \underbrace{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)}_{1/C_s}$$

Kapacita soustavy je

$$C_s = \frac{Q}{U} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

ENERGIE ELEKTRICKÉHO POLE

K nabití kondenzátoru musí být vnějším působením vykonána práce ➔ Tato práce je pak obsažena v elektrickém poli mezi elektrodami ve formě **potenciální energie** E_p

! Nezaměnit ! *energii (značka E má většinou nějaký index)*
intenzitu elektrického pole (často bez indexu – vektor $\vec{E}$ o velikosti E)

– Práce vykonaná při přenesení náboje Q z místa s potenciálem φ_1 do místa s potenciálem φ_2 je $W = Q\varphi_2 - Q\varphi_1 = QU$

– Při nabíjení kondenzátoru s každým dalším přeneseným nábojem $\mathrm{d}Q'$ narůstá napětí o hodnotu $\mathrm{d}W = U'\,\mathrm{d}Q'$

– Práce potřebná k přenesení celkového náboje Q je pak

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_0^Q U'\mathrm{d}Q' = \int_0^Q \frac{Q'}{C}\,\mathrm{d}Q' = \frac{1}{C}\left|\frac{Q'^2}{2}\right|_0^Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Elektrická energie nabitého kondenzátoru: $\boxed{E_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2}$

Vztah platí nezávisle na geometrickém tvaru kondenzátoru.

Elektrická energie nabitého kondenzátoru je soustředěna v elektrickém poli mezi jeho elektrodami.

Elektrickou energii připadající na objem jednotkové velikosti (1 m^3)

nazveme **Hustota elektrické energie** $\boldsymbol{w_{\mathrm{el}}}$

Pro deskový kondenzátor

$$w_{\mathrm{el}} = \frac{celková\ el.\ energie}{objem} = \frac{E_{\mathrm{el}}}{V} = \frac{CU^2}{2Sd} = \frac{\varepsilon_0 \frac{S}{d} U^2}{2Sd} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{U}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Odvozený vztah však platí nejen pro deskový kondenzátor,

ale obecně pro libovolné elektrické pole, tzn.

$$\boxed{w_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

KONDENZÁTOR S DIELEKTRIKEM

Vložíme-li mezi desky kondenzátoru dielektrikum, **kapacita vzroste ε_r krát**

$\boxed{C = \varepsilon_r C_0}$ (veličina ε_r – **relativní permitivita**; $\varepsilon_r \geq 1$, charakterizuje dané dielektrikum)

Např. pro deskový kondenzátor $$C = \varepsilon_r \underbrace{\varepsilon_0 \frac{S}{d}}_{C_0} = \varepsilon_r \cdot \underbrace{C_0}_{\text{vakuum}}$$

V prostoru vyplněném dielektrikem platí všechny zákony a vztahy elektrostatiky, pokud ε_0 nahradíme $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ (ε - **permitivita nebo absolutní permitivita**).

Intenzita pole bodového náboje: $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{Q}{r^2}$$

Intenzita elektrického pole nabité desky: $$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

Důsledek: Intenzita elektrického pole uvnitř dielektrika je ε_r **-krát menší** než ve vakuu

➔ **dielektrikum zeslabuje vnější pole** $$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

DIELEKTRIKA

Co se děje v dielektriku při vložení do elektrického pole?

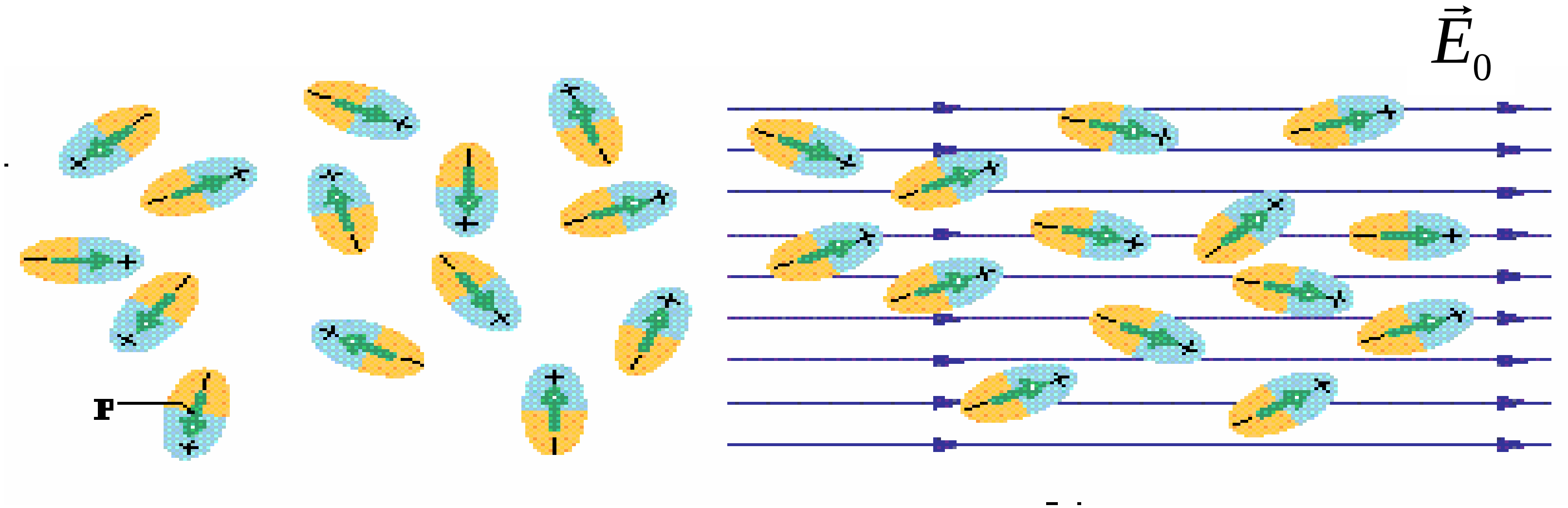
Rozlišit: a) Polární dielektrikum b) Nepolární dielektrikum

Polární dielektrikum

Molekuly polárního dielektrika mají stálé elektrické dipóly (např. H_2O).

Ve vnějším poli $\vec{E}_0$ se molekuly natáčí ve směru vnějšího pole,

rostoucí vlastní pole souboru molekul $\vec{E}'$ působí proti vnějšímu poli $\vec{E}_0$



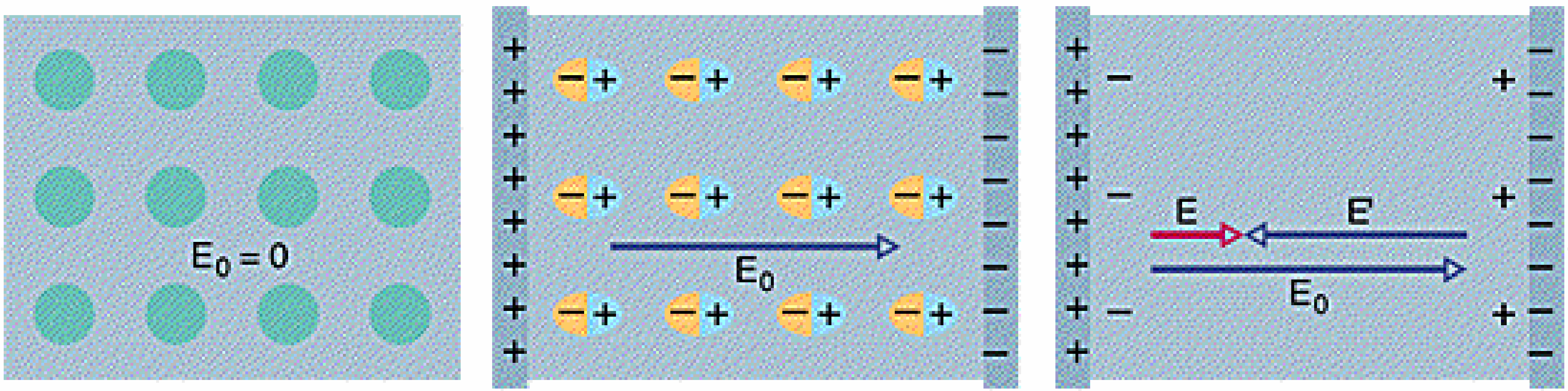
Orientace dipólů je tím úplnější, čím větší je elektrická intenzita
a čím je teplota dielektrika nižší (neruší ji nahodilý tepelný pohyb).

Nepolární dielektrikum

Bez vnějšího pole jsou jsou molekuly nepolárního dielektrika neutrální.

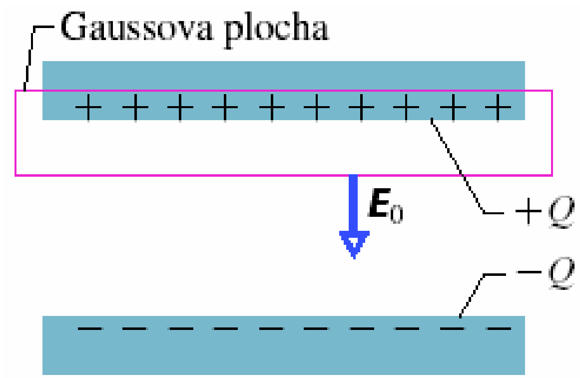
Ve vnějším poli dochází k polarizaci molekul ➔ v dielektriku vzniká indukovaný povrchový náboj ➔ pole povrchového náboje $\vec{E}'$ zeslabuje vnější pole $\vec{E}_0$.

Výsledné pole uvnitř dielektrika: $$\vec{E} = \overbrace{\vec{E}_0 + \vec{E}'}^{\vec{E}_0 \uparrow\downarrow \vec{E}'} \quad \Rightarrow \quad E = E_0 - E'$$



GAUSSŮV ZÁKON ELEKTROSTATIKY PRO DIELEKTRIKA

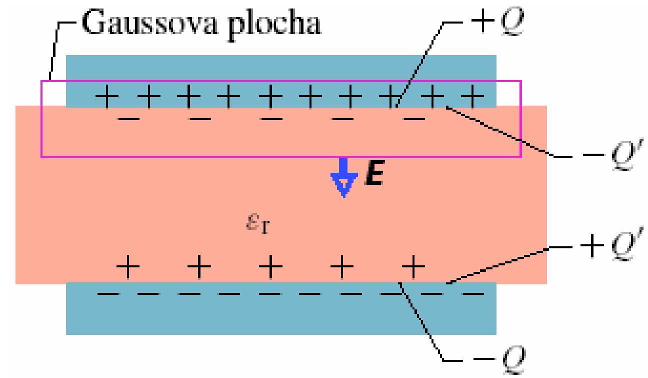
a) Kondenzátor bez dielektrika:



G. z. $$\oint_{(S)} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E_0 S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{Q}{S\varepsilon_0}$$

b) Kondenzátor s dielektrikem:



G. z. $$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q-Q'}{\varepsilon_0}$$

$$ES = \frac{Q-Q'}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q-Q'}{S\varepsilon_0}$$

Pro dielektrika platí: $E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$, dosadíme za E_0 a E,

$$\underbrace{\frac{Q-Q'}{S\varepsilon_0}}_{E} = \frac{1}{\varepsilon_r} \underbrace{\frac{Q}{S\varepsilon_0}}_{E_0}$$

odtud dostaneme vztah $\boxed{Q - Q' = \frac{Q}{\varepsilon_r}}$

Získaný vztah $Q - Q' = \frac{Q}{\varepsilon_r}$ můžeme také zapsat ve tvaru: $\boxed{Q' = Q - \frac{Q}{\varepsilon_r}}$

Rovnice ukazuje, že velikost indukovaného povrchového náboje Q'

- je menší než velikost volného náboje Q , $Q' < Q$,
- je rovna 0, není-li přítomno dielektrikum, tj. je-li v rovnici bráno ε_r=1.

Pro kondenzátor s dielektrikem jsme napsali Gaussů zákon ve tvaru

$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q - Q'}{\varepsilon_0}$ po dosazení ze vztahu $Q - Q' = \frac{Q}{\varepsilon_r}$ získáme jeho všeobecně používaný tvar:

Gaussův zákon elektrostatiky pro dielektrika

$$\boxed{\oint_{(S)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} \qquad \text{nebo} \qquad \boxed{\varepsilon_0 \oint_{(S)} \varepsilon_r \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q}$$

Zahrneme-li výraz ε_r do integrandu lze řešit i obecné případy,

kdy ε_r není na Gaussově ploše konstantní.

Zavedeme novou veličinu.
Vektor $\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$, označíme $\vec{D}$ a nazveme **Elektrická indukce.**

$$\boxed{\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \vec{D}}.$$

Uvážíme-li, že $\oint_{(S)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$ lze přepsat na $\oint_{(S)} \underbrace{\varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}}_{\vec{D}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q$

můžeme **Gaussův zákon elektrostatiky pro dielektrika** psát ve tvaru

$$\boxed{\oint_{(S)} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q}$$

kde Q je *celkový volný náboj*, který je plochou S obklopen.

Indukovaný (vázaný) náboj Q' není v této rovnici obsažen.
Jeho vliv na elektrické pole je již započten
zavedením relativní permitivity na levé straně rovnice.