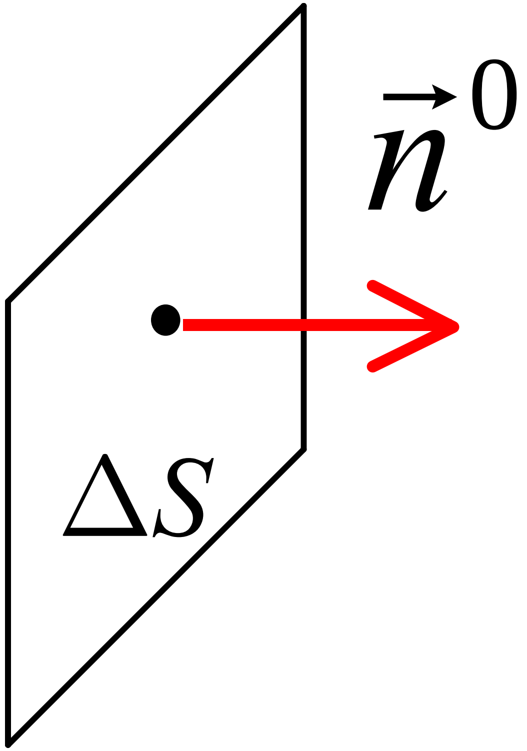
# GAUSSŮV ZÁKON

# ELEKTROSTATIKY

# PLOCHA JAKO VEKTOR

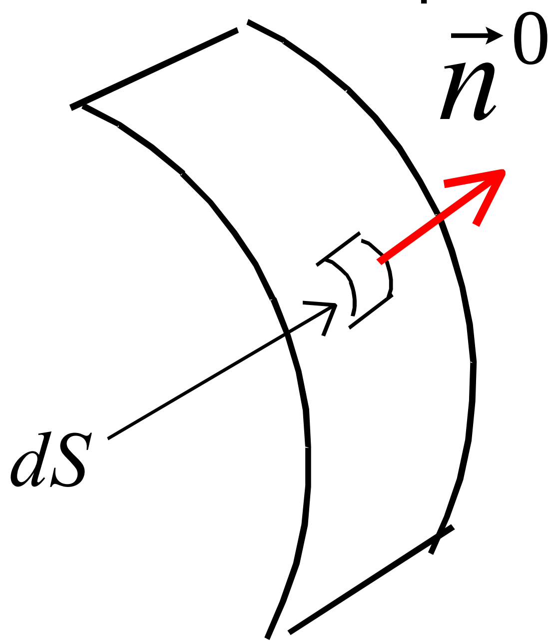
**Matematický doplněk**




Ploše přiřadíme vektor, který
1) je k této ploše kolmý
2) má velikost rovnou velikosti (obsahu) plochy

$$\Delta\vec{S} = \Delta S.\vec{n}^{0}$$

Elementární plocha

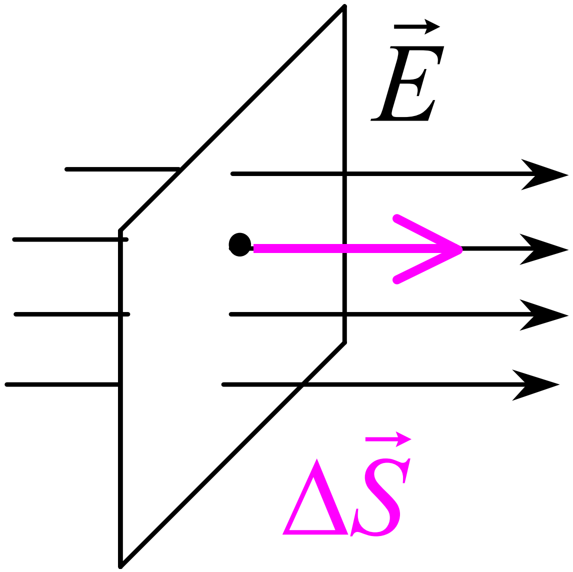



$$d\vec{S} = dS.\vec{n}^{0}$$

U zakřivených a uzavřených ploch orientujeme vektor plochy směrem ven do otevřeného prostoru.

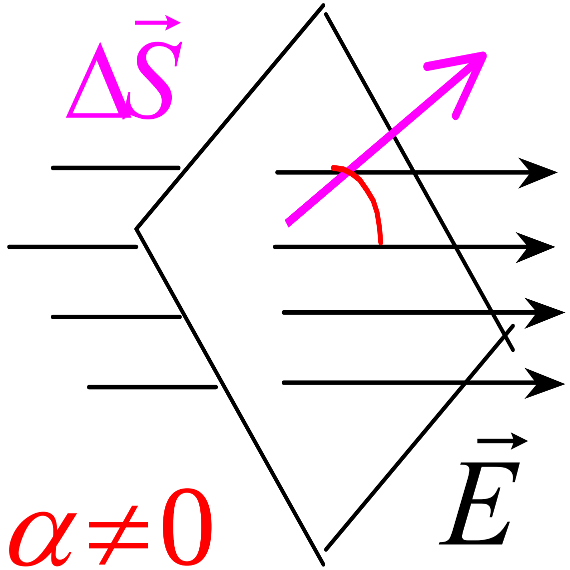
# GAUSSŮV ZÁKON (HRW III, kapitola 24)

## Tok vektoru intenzity elektrického pole – speciální případy




$\vec{E} = \text{konst.} \quad \vec{E} \parallel \Delta\vec{S}$

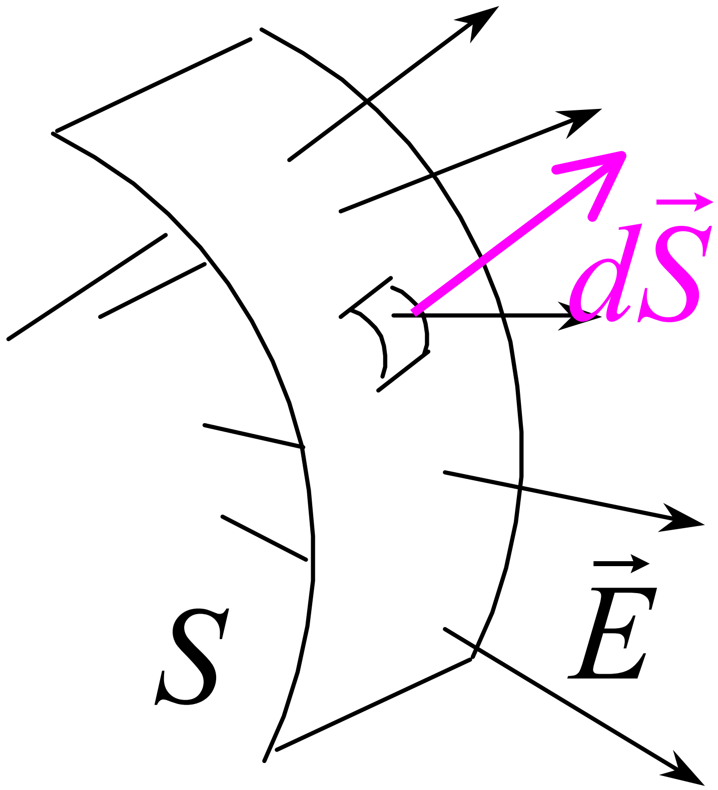
$$\Phi_E = \vec{E}.\Delta\vec{S} = E.\Delta S.\underbrace{\cos\alpha}_{1} = E.\Delta S$$




$\vec{E} = \text{konst.} \quad \vec{E} \measuredangle \Delta\vec{S} \quad \alpha \neq 0$

$$\Phi_E = \vec{E}.\Delta\vec{S} = E.\Delta S.\cos\alpha$$

# Tok vektoru intenzity elektrického pole – obecná definice




$\vec{E} \neq \text{konst.} \quad \vec{E} \measuredangle d\vec{S} \quad \alpha \neq 0$

$$d\Phi_E = \vec{E}.d\vec{S}$$

$$\Phi_E = \sum d\Phi_E \rightarrow \Phi_E = \int_{(S)} d\Phi_E$$

$$\boxed{\Phi_E = \int_{(S)} \vec{E}.d\vec{S}}$$

Tímto způsobem lze pro libovolné vektorové pole **definovat** tok vektoru

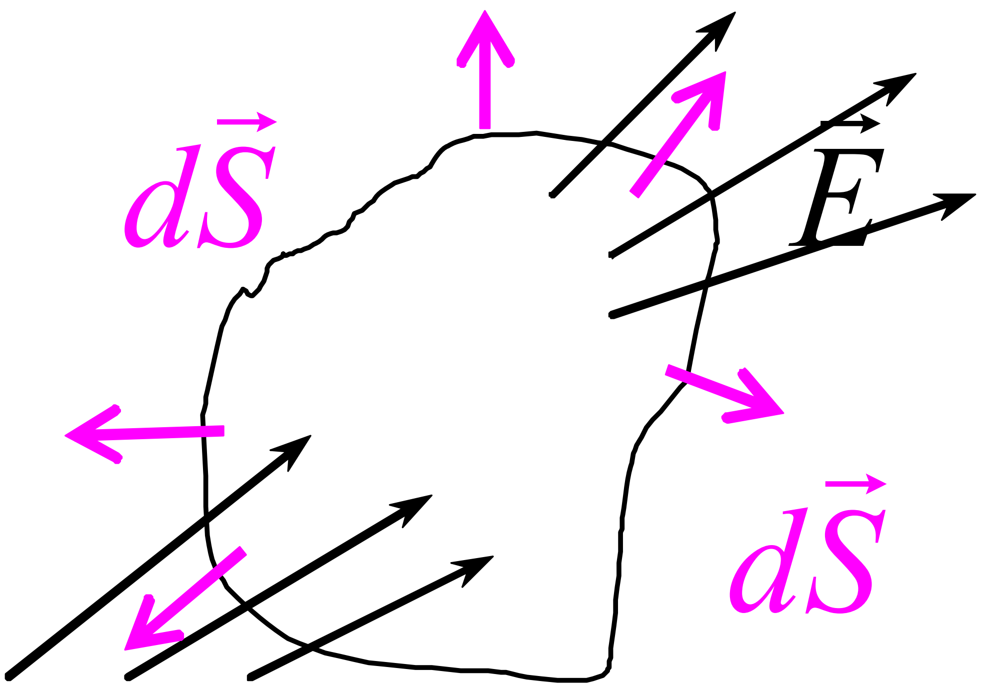
Speciální případ: $\vec{E}, \alpha \equiv \text{konst.}$

$$\Phi_E = \int_{(S)} \vec{E}.d\vec{S} = \int_{(S)} \underbrace{E}_{\text{konst.}} .dS.\underbrace{\cos\alpha}_{\text{konst.}} =$$

$$= E.\cos\alpha.\int_{(S)} dS = E.S.\cos\alpha$$

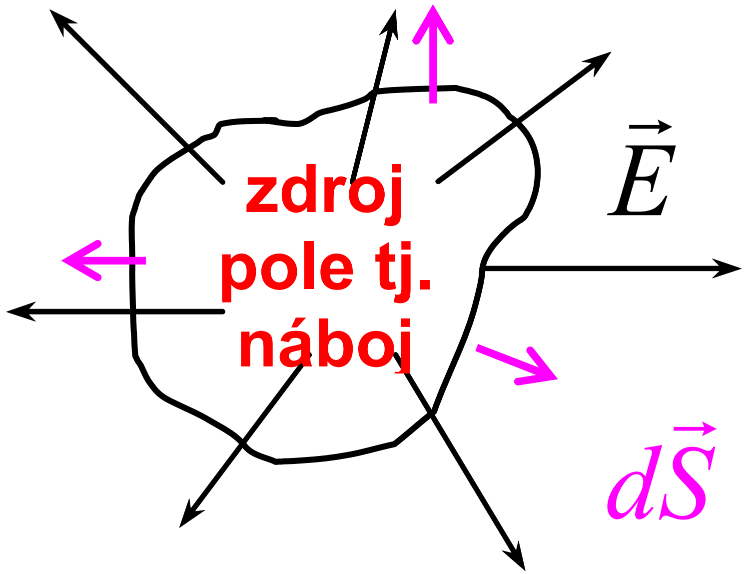
# Tok vektoru intenzity elektrického pole uzavřenou plochou

$$d\Phi = \vec{E}d\vec{S} > 0$$



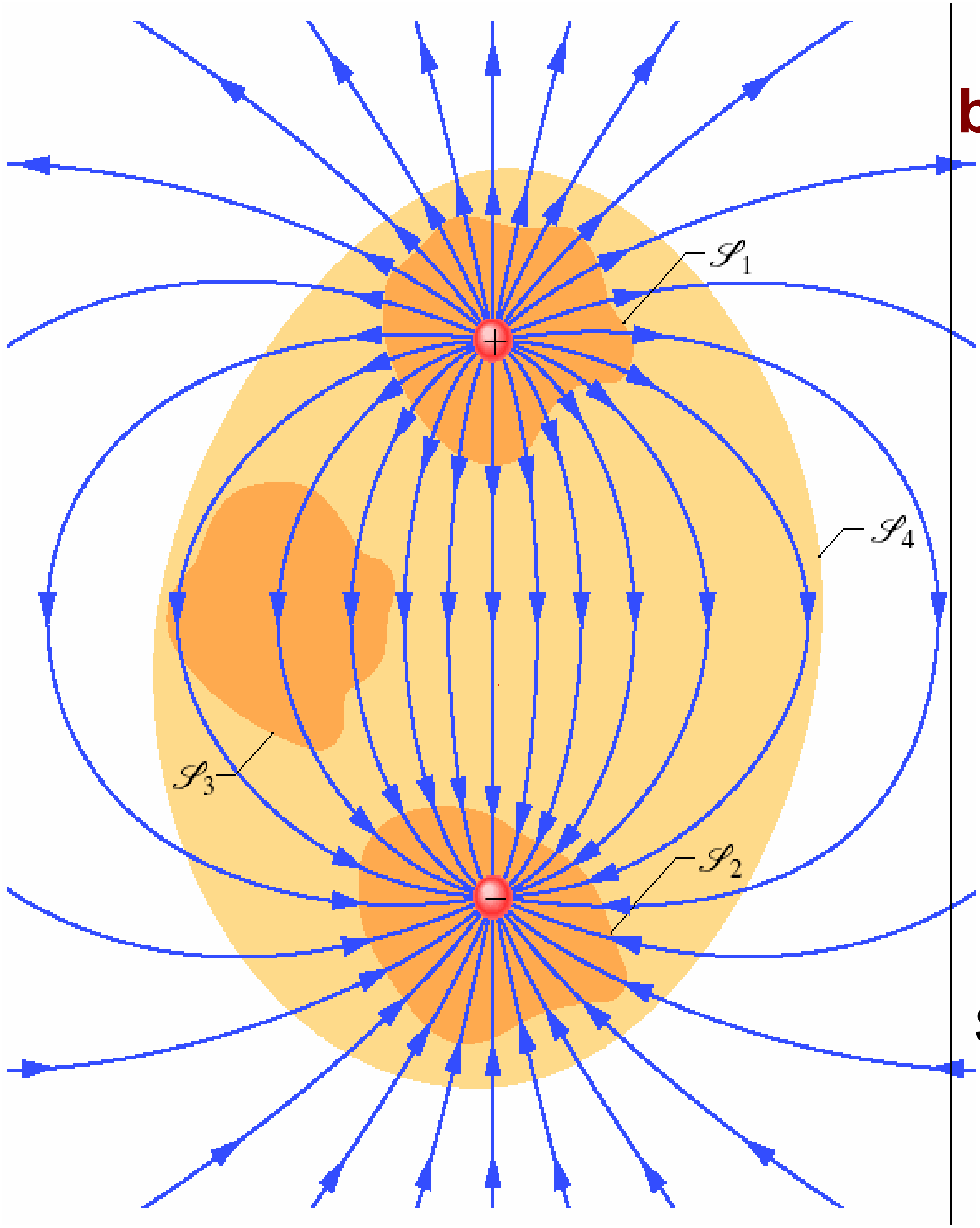

$$d\Phi = \vec{E}d\vec{S} < 0$$

$$\boxed{\Phi = \oint\limits_{(S)} d\Phi = \oint\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = 0}$$




Uvnitř uzavřené plochy je zdroj elektrického pole - náboj

$$\boxed{\Phi = \oint\limits_{(S)} d\Phi = \oint\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} \gtrless 0}$$




# Dva stejně velké bodové náboje opačného znaménka a siločáry elektrického pole jimi vytvořeného.

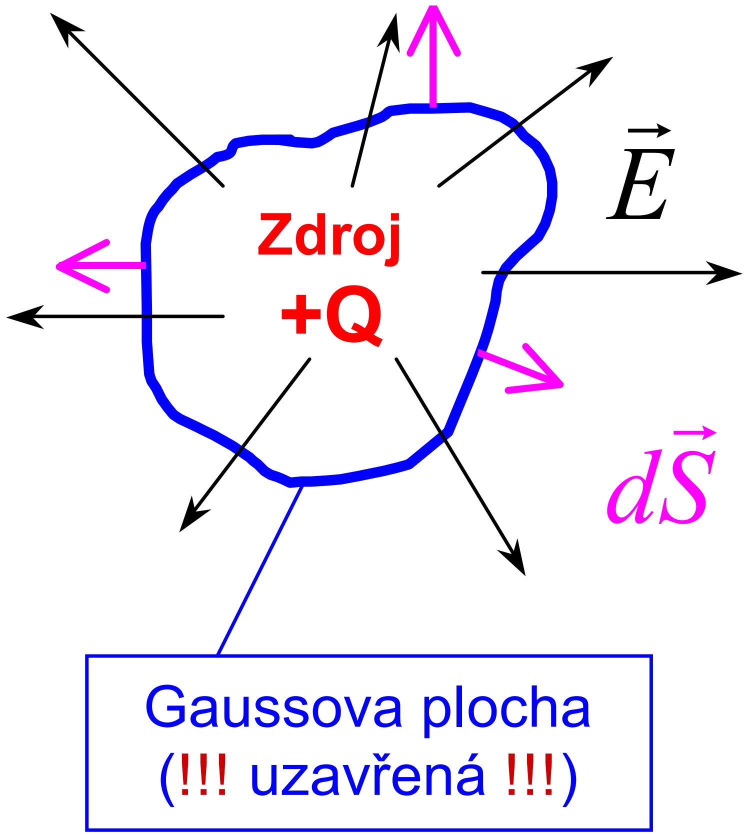
V řezu jsou znázorněny čtyři Gaussovy plochy.

$\mathscr{S}_1$ obklopuje kladný náboj,
$\mathscr{S}_2$ obklopuje záporný náboj,
$\mathscr{S}_3$ neobklopuje žádný náboj,
$\mathscr{S}_4$ obklopuje oba náboje.

**Součet nábojů uvnitř je tedy nulový.**

Stejný počet siločar, který do prostoru obklopeného plochou vstupuje, také z něj vystupuje zase ven.

# Gaussův zákon elektrostatiky




Vyjadřuje vztah mezi intenzitou elektrického pole na uzavřené Gaussově ploše a celkovým nábojem, který je touto plochou obklopen.

$$\boxed{\oint_{(S)} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}, \text{ kde } \quad Q = \sum_i Q_i$$

Tok intenzity elektrického pole **libovolnou uzavřenou plochou** je roven součtu všech nábojů, které jsou touto plochou obklopeny, děleným permitivitou ($\varepsilon_0$ – ve vakuu)

Jiná vyjádření (HRW)

$$\varepsilon_0.\oint_{(S)} \vec{E}.d\vec{S} = Q \quad \text{nebo} \quad \varepsilon_0.\Phi = Q$$

Gaussův zákon platí obecně pro libovolné vektorové pole, nejen pro pole elektrostatické.

# Volba tvaru Gaussovy plochy

Vhodná volba zjednoduší výpočet integrálu v Gaussově zákoně. Pravidla:

1. Plochu volíme vždy uzavřenou tak, aby obklopila zadané náboje.
2. Plochu volíme tak, aby bod, ve kterém $\vec{E}$ určujeme, na této ploše ležel.
3. Gaussovu plochu volíme vždy tak, aby v každém jejím bodě byla splněna právě jedna z následujících podmínek:

   a) $\boxed{\vec{E} \parallel d\vec{S}, \quad \text{pak} \quad \vec{E}.d\vec{S} = \pm E.dS}$ nebo b) $\boxed{\vec{E} \perp d\vec{S}, \quad \text{pak} \quad \vec{E}.d\vec{S} = 0}$

4. Gaussovu plochu volíme vždy tak, aby podmínka a) tzn., že vektor elektrické intenzity $\vec{E}$ je rovnoběžný (souhlasně nebo nesouhlasně) s vektorem $\mathrm{d}\vec{S}$ byla splněna, v těch místech Gaussovy plochy, kde má $\vec{E}$ konstantní velikost. Pak můžeme $E$ vytknout před integrační značku plošného integrálu a získáme

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \pm \oint_{(S)} E \, \mathrm{d}S = \pm E \oint_{(S)} \mathrm{d}S = \pm E \, S \quad .$$

**V obecných případech je výpočet $\vec{E}$ složitý.**

# Využití Gaussova zákona elektrostatiky

**Používá se k určení intenzity elektrického pole v případech, kdy náboj je rozložen s vhodnou symetrií.**

- **Bodový náboj** — Řeší stejný problém jako Coulombův zákon
- **Nabitá koule** — Koule o poloměru $R$ nabitá rovnoměrně nábojem s objemovou hustotou $\rho$
- **Nabitá kulová plocha** — Kulová slupka o poloměru $R$ nabitá rovnoměrně nábojem s plošnou hustotou $\sigma$
- **Nekonečné nabité vlákno** — Nekonečně dlouhé vlákno (válec) nabité rovnoměrně nábojem s lineární hustotou $\tau$
- **Nekonečná nabitá deska**
  - **nevodivá**
  - **vodivá**

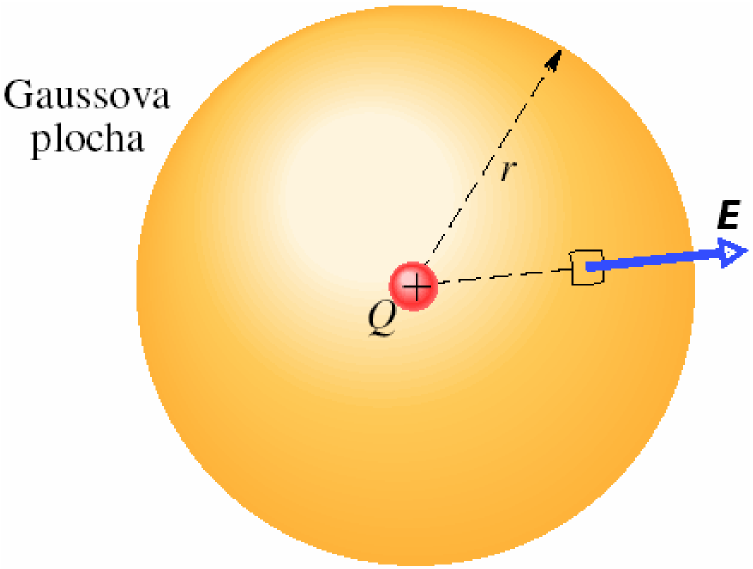
**Bodový náboj**

# GAUSSŮV ZÁKON A COULOMBŮV ZÁKON

Oba zákony jsou ekvivalentní $\Rightarrow$ lze odvodit jeden z druhého.

Z Gaussova zákona vypočteme intenzitu elektrického pole $\vec{E}$ ve vzdálenosti *r* od náboje

Gaussovu plochu volíme ve tvaru kulové plochy o poloměru $r$.



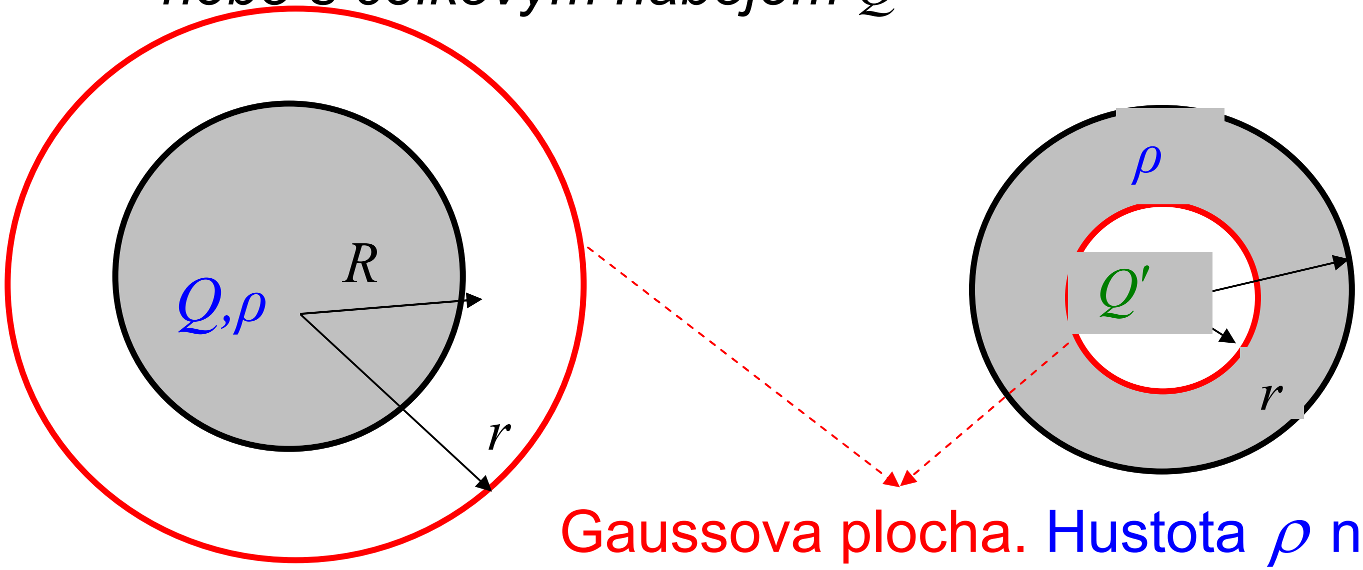

G. z. $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

$$\left|\vec{E}\right| = \text{konst.},\quad \vec{E} \uparrow\uparrow \mathrm{d}\vec{S},\quad E\oint_S \mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Povrch koule $S = 4\pi r^2$, $\Rightarrow$ $E\left(4\pi r^2\right) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}}$$ (plyne i z Coulombova zák.)

**Nabitá koule** *Rovnoměrně nabitá koule s objemovou hustotou náboje $\rho$ nebo s celkovým nábojem $Q$*




Gaussova plocha. Hustota $\rho$ nebo náboj $Q$

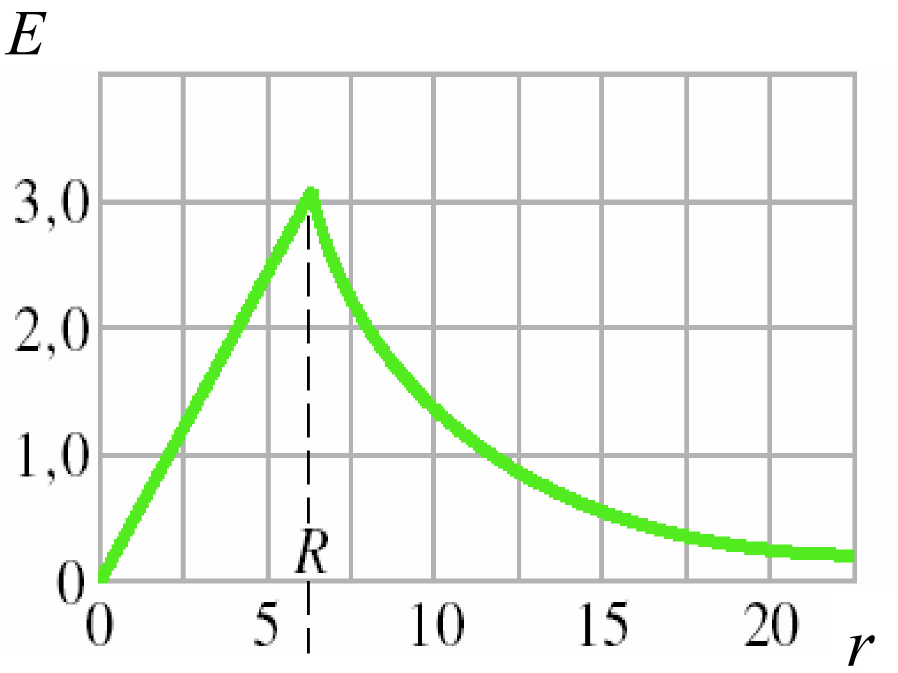
$r > R$ Gaussovou plochou je povrch koule o poloměru $r > R$.
Rozprostřený náboj vytváří stejné elektrické pole jako stejně velký bodový náboj téhož znaménka, umístěný ve středu koule.

Tedy

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}}$$

$r < R$ Gaussovou plochou je povrch koule o poloměru $r < R$.
Náboj ležící <u>vně</u> této Gaussovy plochy nevytváří na ní žádné elektrické pole.

Náboj obklopený uzavřenou plochou vytváří stejné pole, jako by byl tento náboj ve středu kulové vrstvy. Část celkového náboje, který je touto Gaussovou plochou obklopen označíme $Q'$.
Poněvadž je koule nabita homogenně s objemovou hustotou $\rho$, je náboj úměrný objemu koule ($Q = \rho V$ a $Q' = \rho V'$) a platí

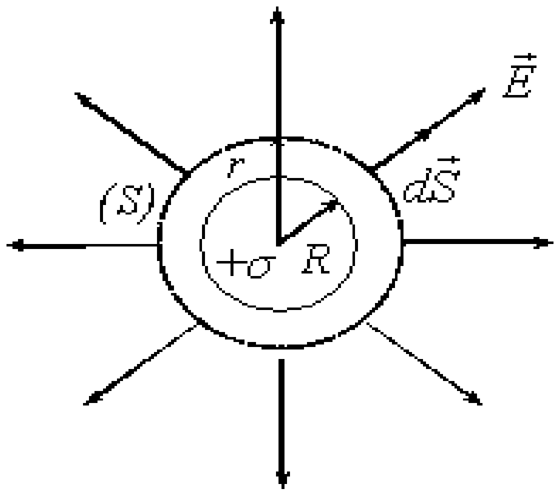



$$\rho = \frac{Q'}{V'} = \frac{Q}{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q'}{Q} = \frac{V'}{V}$$

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \Rightarrow \quad Q' = Q\frac{r^3}{R^3}$$

a $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r}$$

## Nabitá kulová slupka




$$\oint_{(S)} \vec{E}\,.\,d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$ **Gaussův zákon**

$$\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{S}$$

$$\oint_{(S)} \vec{E}\,.d\vec{S} = \oint_{(S)} E\,.\,dS = E \oint_{(S)} dS = E\,4\pi r^2$$

**Po dosazení do Gaussova zákona**

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

**Pro** $r > R$

$$Q = \sigma\,4\pi\,R^2 \Rightarrow E = \frac{\sigma\,R^2}{\varepsilon_0\,r^2}$$

**Pro** $r < R$

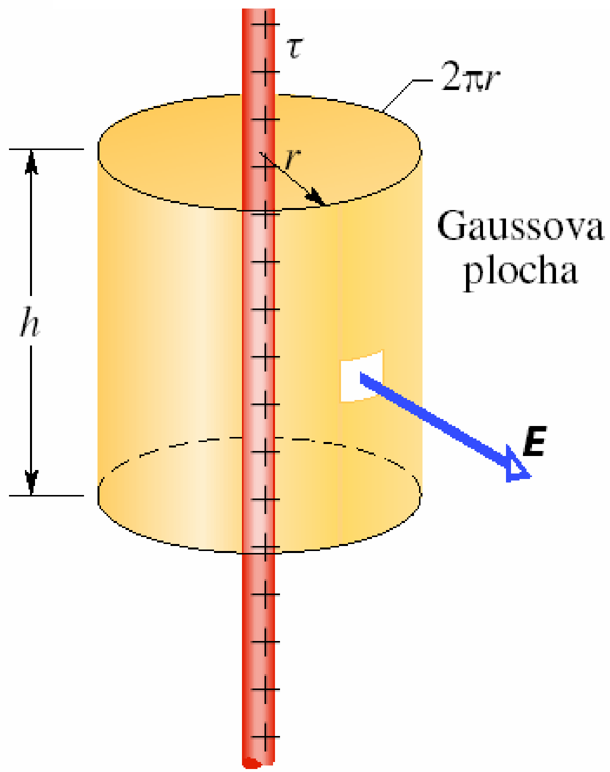
$$Q = 0 \Rightarrow E = 0$$

## Nekonečné nabité vlákno

*Nekonečně dlouhé vlákno rovnoměrně nabité kladným nábojem s délkovou hustotou $\tau$*

*Gaussovou plochou je* ***povrch válce*** *o poloměru $r$ a výšce $h$.*

Na základnách válce je $\vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{S}$ a proto $\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$.
Tok základnami je nulový.Budeme se zabývat pouze pláštěm




G. z. $$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\left|\vec{E}\right| = \text{konst.},\ \vec{E} \uparrow\uparrow \mathrm{d}\vec{S},\quad E\oint \mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow ES = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

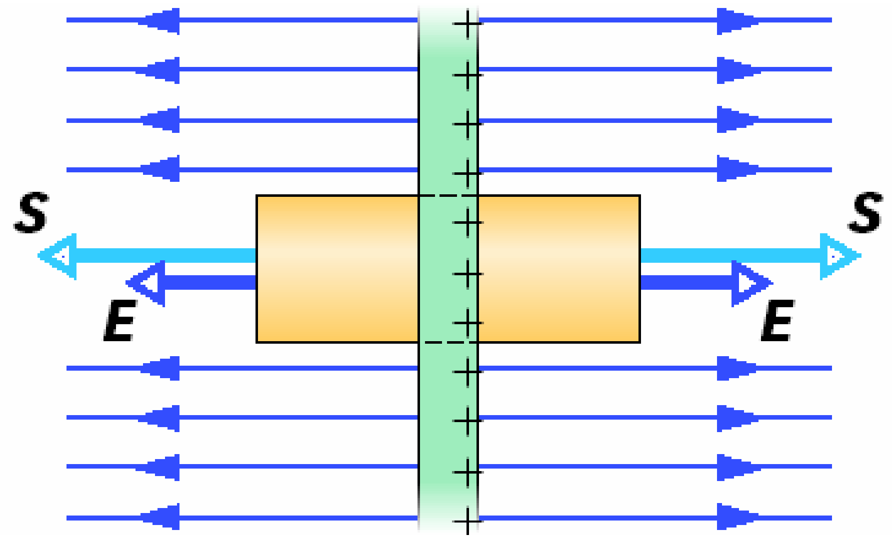
Plášť válce $S = 2\pi r \cdot h$

$$E(2\pi r h) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi r h \varepsilon_0},$$ kde $Q = \tau h$,

$$E = \frac{\tau h}{2\pi r h \varepsilon_0}, \qquad \boxed{E = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0 r}}$$ nabité vlákno

## Nekonečná nabitá deska – nevodivá

*Nekonečně velká tenká rovina s konstantní plošnou hustotou náboje $\sigma$*




Gaussovou plochou je povrch válce s podstavami o obsahu $S$, jehož osa je kolmá k rovině.

***Siločáry neprotínají plášť válce***
$\Rightarrow$ ***pláštěm neprochází žádný tok.***

Celkový tok je tedy roven součtu toků oběma **podstavami** válce

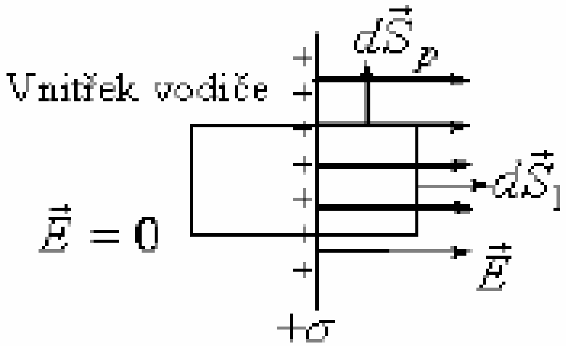
G. z. $\oint \vec{E}\cdot(2\,\mathrm{d}\vec{S}) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, $\quad |\vec{E}| = \text{konst.}$, $\quad \vec{E} \uparrow\uparrow \mathrm{d}\vec{S}$, $\quad 2E\oint \mathrm{d}S = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow 2ES = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

$2ES = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ pro $Q = \sigma S$ je $2ES = \dfrac{\sigma S}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$ nabitá plocha

## Nabitý vodivý předmět (vodič), bez vodivého spojení s okolím (izolovaný) tedy Nabitý izolovaný vodič

Náboj přivedený zvnějšku na povrch izolovaného vodiče se rozmístí na jeho vnějším povrchu. – Elektrické pole uvnitř vodiče musí být nulové, z Gaussova zákona tedy plyne, že uvnitř vodiče nemůže být žádný volný náboj.

Coulombova věta – <u>intenzita pole těsně nad povrchem vodiče</u>




Gaussův zákon $\oint\limits_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

Gaussova plocha = povrch válce se základnami rovnoběžnými s povrchem vodiče a pláštěm kolmým na povrch

$$\oint\limits_{(S)} \vec{E}.d\vec{S} = \int\limits_{(S_1)} \vec{E}.d\vec{S}_1 + 0 + \int\limits_{(S_p)} \vec{E}.d\vec{S}_p = \int\limits_{(S_1)} E\,dS_1 \cos 0 + \int\limits_{(S_p)} E\,dS_p \cos\frac{\pi}{2} = \int\limits_{(S_1)} E\,dS_1 =$$

$$= E \int\limits_{(S_1)} dS_1 = E\,S$$

$$Q = \sigma S$$

Z Gaussova zákona plyne $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$