DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU

Součást Newtonovské klasická mechanika (v<<c)

Zkoumá příčiny pohybu těles, vzájemnou interakci okolních těles.

Vzájemné působení $\Leftarrow \Rightarrow$ pohyb těles nebo deformace

Základní veličiny dynamiky

- ✓ hmotnost
- ✓ hybnost
- ✓ síla

\+ kinematické veličiny

polohový vektor

rychlost

zrychlení

Hmotnost *m*

Hmotnost je kladná skalární veličina, která vyjadřuje míru setrvačných a tíhových vlastností tělesa. Je základní vlastností všech hmotných objektů.

Základní vlastnosti

- ✓ je dána vnitřní strukturou těles
- ✓ v klasické mechanice konstantní
- ✓ nezávisí na volbě vztažné soustavy
- ✓ platí zákon zachování celkové hmotnosti

Základní jednotka $[m] = \mathrm{kg}$

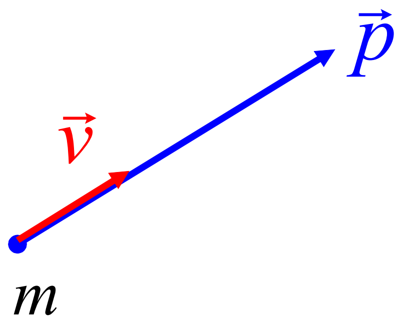
Hybnost $\vec{p}$

Hybnost je vektorová veličina vyjadřující míru pohybového stavu.

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$, kde m je hmotnost a $\vec{v}$ rychlost částice.

Základní vlastnosti

- ✓ Hybnost je vektor, má velikost, směr a orientaci
- ✓ $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{v}$, vektory jsou souhlasně rovnoběžné



Základní jednotka $[\vec{p}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$

Síla $\vec{F}$

Síla je vektorová fyzikální veličina, která je mírou vzájemného působení mezi hmotnými objekty.

Síly

- tahové, tlakové, tření (při kontaktu těles).
- gravitační, elektrické, magnetické (vyvolané polem).

Platí princip superpozice $\sum \vec{F}_i = \vec{F}$

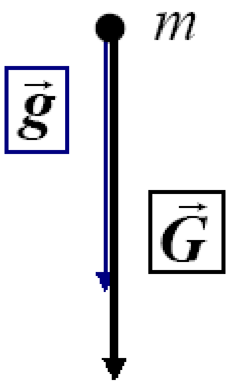
Základní jednotka $\left[\vec{F}\right] = \mathrm{N}$ (newton)

Pojem síla je abstrakce. Síla jako taková nemůže reálně existovat, pokud neexistují hmotné objekty.

SÍLY V PŘÍRODĚ

Tíhová síla

Volný pád probíhá jako důsledek působení stálé síly, kterou nazýváme ***tíhová síla*** $\vec{G}$. Je výslednicí gravitační a odstředivé síly.



Platí

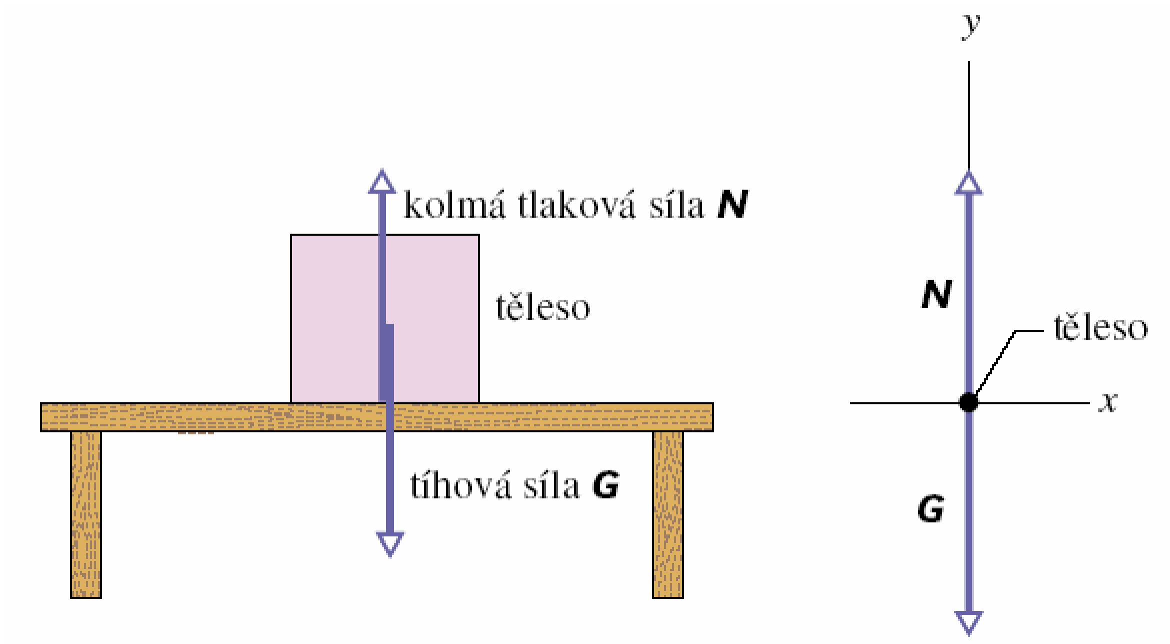
$$\boxed{\vec{G} = m\,\vec{g}}\,, \qquad \vec{G} \uparrow\uparrow \vec{g}$$

Tíhovou silou působí Země na každé těleso při svém povrchu a uděluje mu tíhové zrychlení $\vec{g}$:

$$\boxed{\vec{g} = \vec{a}_g + \vec{a}_o} \qquad g = 9{,}80664\ \mathrm{m.s^{-2}} \doteq \underline{\underline{9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}}}$$

Kolmá tlaková síla

Podložka působí na těleso ***tlakovou (normálovou)*** $\vec{N}$**.** Tato síla je vždy kolmá k povrchu podložky.

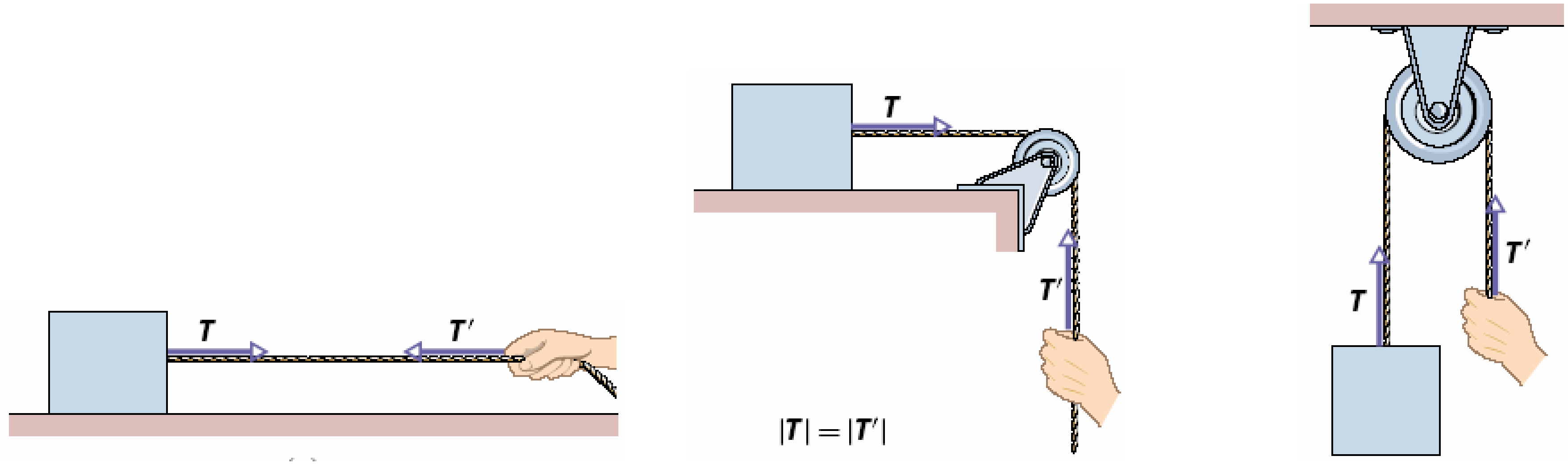


Je-li těleso na vodorovné podložce, síla $\vec{N}$ míří svisle vzhůru, tíhová síla $\vec{G} = m\,\vec{g}$ dolů a jejich **velikosti** se sobě rovnají $\boxed{\left|\vec{N}\right| = \left|\vec{G}\right| = mg}$.

Tahová síla

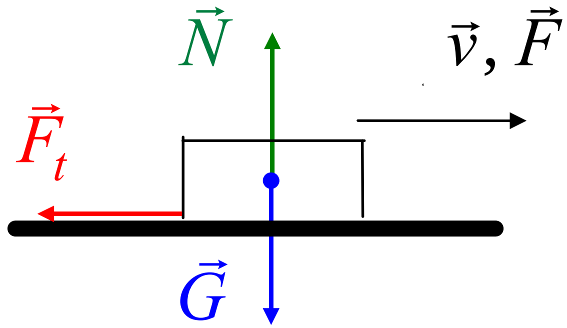
Těleso je taženo silou $\vec{T}$, která směřuje podél lanka ven z tělesa a má působiště v bodě úchytu. Hovoříme o *tahové* nebo *tažné síle*. Velikosti tahových sil jsou v situacích v uvedených případech rovny

$$\boxed{\left|\vec{T}\right| = \left|\vec{T}'\right|}.$$



Třecí síla

Třecí síla $\vec{F}_t$ vzniká při smýkání pevného tělesa po podložce. Tato síla je rovnoběžná s podložkou a směřuje proti směru skutečného pohybu tělesa.



Velikost třecí síly $\vec{F}_t$ je přímo úměrná velikosti síly $\vec{N}$ (! <u>Směr mají různý</u> !)

$$\boxed{F_t = \mu N},$$

μ je *součinitel smykového tření* z intervalu < 0;1 >.

NEWTONOVY POHYBOVÉ ZÁKONY

Základem klasické mechaniky jsou 3 Newtonovy pohybové zákony, které popisují souvislost pohybu tělesa a sil, které na ně působí.

1. **Zákon setrvačnosti**
2. **Zákon síly**
3. **Zákon akce-reakce**

1NPZ *Zákon setrvačnosti*

Každé těleso setrvává v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu, pokud není vnějšími silami přinuceno tento stav změnit.

Důkaz tohoto zákona nemůžeme provést – nelze realizovat stav tělesa, kdy na něj nepůsobí žádné síly. Jeho důsledky však jsou v souladu se skutečností (pohyby nebeských těles)

Důsledek:

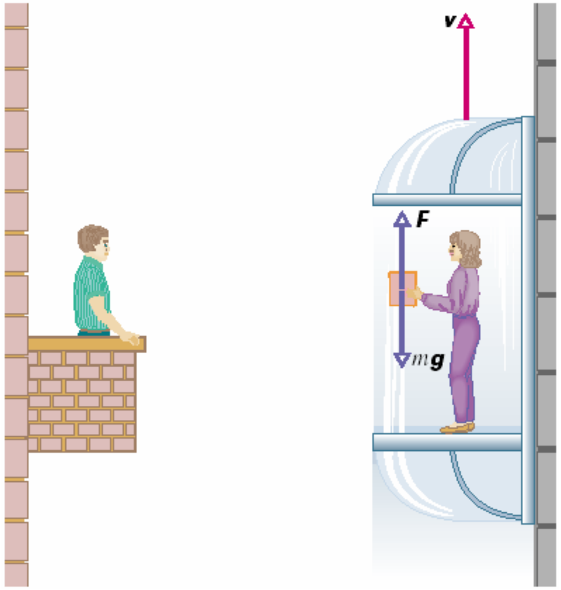
z hlediska popisu pohybu jsou klid a rovnoměrný pohyb ekvivalentní (člověk ve vlaku, ve výtahu).

Vztažné soustavy

- ✓ V přírodě neexistuje ani absolutní klid ani absolutní rovnoměrný přímočarý pohyb.
- ✓ Klid a rovnoměrný přímočarý pohyb závisejí na volbě souřadné soustavy (která je spojena s určitým vztažným tělesem).
- ✓ Vztažné těleso (nejčastěji Země) se může pohybovat.

Souřadnicové soustavy, ve kterých platí 1. NPZ se nazývají **inerciální**[1] **.** Jsou to soustavy, které se vůči sobě pohybují konstantní rychlostí (nebo nepohybují).

[1] inertia = setrvačnost



Sluneční soustavu, Zemi a soustavy s ní spojené, nazýváme *laboratorními soustavami*, tj. přibližně ***inerciálními soustavami.***

Inerciální je soustava Koperníkova – počátek je ve středu sluneční soustavy a osy směřují ke třem vzdáleným hvězdám – stálicím, které neleží v jedné rovině.

Neinerciální soustava – ve vztahu k inerciální soustavě se pohybuje zrychleně.

Příklady: *zrychlování, zpomalování, změna směru pohybu (startující letadlo, auto jedoucí do zatáčky, kabina výtahu při rozjezdu a zastavení, kolotoč atd.)*

2NPZ Zákon síly

Časová změna hybnosti hmotného bodu je rovna výsledné síle, která na těleso působí a má s ní stejný směr.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}} \qquad \vec{F} \uparrow\uparrow \mathrm{d}\vec{p}$$

kde $\vec{p} = m\vec{v}$ je hybnost a

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots.. + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$ je výslednice všech působících sil.

V klasické mechanice nezávisí hmotnost na rychlosti, $m = konst.$

Platí tedy $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$. Protože podle definice $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}$,

dostáváme

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

pohybová rovnice

Zrychlení $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{F}$, $\vec{a} \sim \vec{F}$

V tomto tvaru platí pohybová rovnice jen pro hmotný bod a pro translační (posuvný) pohyb tuhého tělesa.

Jednotka : $\left[\vec{F}\right] = \mathrm{N}$ (kg.m.s^{-2})

***1 newton** je síla, která hmotnému bodu o hmotnosti 1 kg udělí zrychlení 1 m.s^{-2}.*

3NPZ *Zákon akce – reakce*

Síly vzájemného působení těles jsou stejně velké, leží v téže přímce a mají vzájemně opačnou orientaci.

Jestliže těleso A působí na těleso B silou $\vec{F}_{AB}$, potom těleso B působí na těleso A silou $\vec{F}_{BA}$, a platí

$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{AB}} = -\vec{F}_{\mathrm{BA}}}$$

- Zákon akce a reakce neboli *„vzájemného působení“* platí, i když tělesa na sebe působí prostřednictvím svých polí.
- Síly akce a reakce jsou stejně velké, ale jejich pohybový účinek může být velmi rozdílný – příklad: Země – jablko.

POHYBOVÁ ROVNICE

Pohybová rovnice

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

je rovnicí vektorovou, kterou lze rozložit na 3 skalární rovnice. V kartézské soustavě souřadnic:

$$\left.\begin{aligned}
F_x &= ma_x = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\
F_y &= ma_y = m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \\
F_z &= ma_z = m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}\right\} \quad \text{3 skalární rovnice}$$

Existují dvě úlohy dynamiky:

∇ Známe-li trajektorii pohybu (a hmotnost), můžeme určit působící sílu.

∇ ∇ Známe-li složky síly v každém čase *t*, můžeme (??) určit trajektorii pohybu.

Řešení úlohy ∇

Máme dán polohový vektor $\vec{r}(t)$, odkud

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \xrightarrow{\text{derivace}} \vec{v} = \vec{v}(t) \xrightarrow{\text{derivace}} \vec{a} = \vec{a}(t)$$

Známe-li hmotnost, napíšeme tři (nebo dvě) skalární rovnice pro F_x , F_y, (F_z) a tím je úloha vyřešena.

Řešení úlohy ∇∇

Z pohybové rovnice $\vec{F} = m\vec{a}$ vyjádříme vektor zrychlení $\vec{a}(t)$, odkud

$$\vec{a}(t) \xrightarrow{\text{integrace}} \vec{v} = \vec{v}(t) \xrightarrow{\text{integrace}} \vec{r} = \vec{r}(t)$$

Podrobněji:

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{v} = \frac{1}{m}\vec{F}\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{1}{m}\int \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{1}{m}\int \vec{F}\,\mathrm{d}t + \vec{v}_0}$$

1. integrál pohybové rovnice

Pro jednotlivé souřadnice:

$$\boxed{v_x = \int \frac{1}{m} F_x\,\mathrm{d}t + v_{0x}} \qquad \boxed{v_y = \int \frac{1}{m} F_y\,\mathrm{d}t + v_{0y}} \qquad \boxed{v_z = \int \frac{1}{m} F_z\,\mathrm{d}t + v_{0z}}$$

Integrační konstanty v_0, resp. v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}, reprezentují libovolný vektor rychlosti.

Analogicky

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \int \vec{v}\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\vec{r} = \int \vec{v}\,\mathrm{d}t + \vec{r}_0}$$

2. integrál pohybové rovnice

Pro jednotlivé souřadnice:

$$x = \int v_x\,\mathrm{d}t + x_0\,; \qquad y = \int v_y\,\mathrm{d}t + y_0\,; \qquad z = \int v_z\,\mathrm{d}t + z_0$$

Integrační konstanta $\vec{r}_0$, resp. r_{0x}, r_{0y}, r_{0z}, reprezentuje libovolný polohový vektor.

Vektory $\vec{v}_0$, $\vec{r}_0$ nevyplývají z řešení diferenciálních rovnic. Pokud je neznáme, má úloha ∇ ∇ nekonečně mnoho řešení.

Síla $\rightarrow$ zrychlení. V okamžiku, kdy síla začala působit, měl hmotný bod určitou polohu a určitou rychlost.

Pohybová rovnice (úloha ∇ ∇) má jednoznačné řešení pouze tehdy, pokud jsou dány ***počáteční podmínky***:

$$\boxed{\begin{array}{lll} x_0 = x(t_0), & y_0 = y(t_0), & z_0 = z(t_0) \\ v_{0x} = v_x(t_0), & v_{0y} = v_y(t_0), & v_{0z} = v_z(t_0) \end{array}}$$

Počáteční podmínky představují polohový vektor a vektor rychlosti hmotného bodu v určitém definovaném okamžiku t_0 (v okamžiku, kdy začala síla působit).

Výsledek silového působení závisí na $\vec{F}$ a na vzájemné orientaci vektorů $\vec{v}_0$, $\vec{F}_0$.

Konstantní síla (směr i velikost) $\Rightarrow$ $\vec{a} = konst.$ Pokud

$\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{v}_0$ $\Rightarrow$ rovnoměrně zrychlený pohyb

$\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{v}_0$ $\Rightarrow$ rovnoměrně zpomalený přímočarý pohyb

$\vec{F}_0$, $\vec{v}_0$ různý směr $\Rightarrow$ skládání pohybů (např. vodorovný vrh)

Síla o konstantní velikosti, která směřuje stále do jednoho bodu $\Rightarrow$ rovnoměrný pohyb po kružnici.

Poznámka:

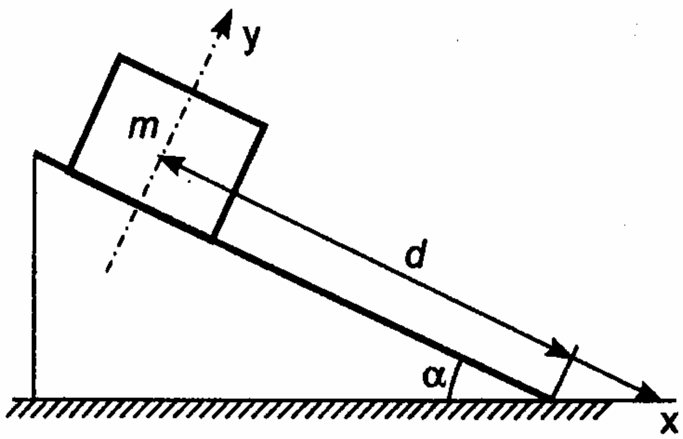
dostředivá síla $$F_d = ma_d = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R$$

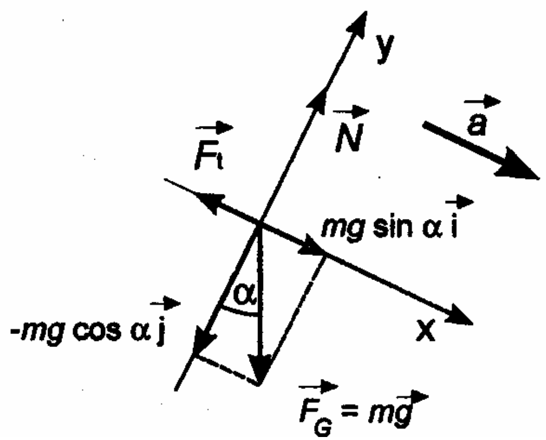
Těleso o hmotnosti *m* se nachází na nakloněné rovině, která svírá s vodorovným směrem úhel α. Koeficient kinematického tření mezi tělesem a nakloněnou rovinou je $\boldsymbol{f_k}$.

a) **Určete zrychlení**, s jakým se těleso pohybuje po nakloněné rovině poté, co bylo uvolněno z klidu.

Řešení: a)

1. Zakreslíme **všechny** síly, které působí na těleso (tíhová síla $\vec{F}_G$, normálová síla $\vec{N}$ a síla tření $\vec{F}_t$). Výslednice sil působících na těleso je dána jejich vektorovým součtem. Účinkem této výsledné síly se těleso bude pohybovat po nakloněné rovině **zrychleně**.





2. Zvolíme souřadnicovou soustavu a vyznačíme orientaci os (pohyb se děje ve směru osy x, takže $a_y = 0$. Jednotlivé síly napíšeme ve složkách ve zvolené souřadnicové soustavě.

$$\vec{F}_G = mg\sin\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j}\,, \qquad \vec{N} = N\,\vec{j}\,, \qquad \vec{F}_t = -f_k N\,\vec{i}$$

3. Aplikujeme 2. pohybový zákon $\qquad \sum \vec{F} = m\vec{a}$

Tato vektorová rovnice je ekvivalentní dvěma skalárním rovnicím:

$$(1) \qquad ma_x = mg\sin\alpha - f_k N$$

$$(2) \qquad ma_y = -mg\cos\alpha + N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\alpha$$

4. Máme dvě rovnice pro neznámé $\boldsymbol{a_x}$ a $\boldsymbol{N}$. Jejich řešením obdržíme hledané zrychlení

$$\underline{\underline{a_x = g(\sin\alpha - f_k\cos\alpha)}}$$

Poznámka 1:

Aby bylo těleso uvedeno do pohybu po nakloněné rovině směrem dolů, musí *x*-ová složka výsledné síly být kladná, tedy

$$mg\sin\alpha - f_k mg\cos\alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha > f_k$$

Poznámka 2:

Souřadnicovou soustavu volíme tak, aby řešení úlohy bylo co nejjednodušší. Obvykle jednu z os ztotožníme se směrem pohybu. Bilance sil v kolmém směru – viz rovnice (2) – nám pak umožní vyjádřit sílu tření.

b) Za předpokladu, že těleso uvolníme z klidu, **určete rychlost *v_d*** poté, co těleso urazilo po nakloněné rovině dráhu ***d***.

Řešení: b)

Poloha tělesa a rychlost jeho pohybu s konstantním zrychlením jsou dány vztahy

(3) $v_x = a_x t + v_{0x}$ (4) $x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0$

Položíme počátek souřadnic do místa, odkud uvolníme těleso, takže $x_0 = 0$. Počáteční rychlost je $v_{0x} = 0$ (těleso podle zadání uvolníme z klidu), konečná poloha je $x = d$. Dosazením těchto konstant do vztahů (3) a (4) obdržíme:

$$d = \frac{1}{2} a_x t^2 \quad , \qquad v_x = a_x t$$

Vyloučením času získáme pak z obou rovnic hodnotu rychlosti na konci dráhy d:

$$v_x(x = d) = v_d = \sqrt{2 d a_x} = \underline{\underline{\sqrt{2dg(\sin\alpha - f_k \cos\alpha)}}}$$