

MECHANIKA

KLASICKÁ MECHANIKA

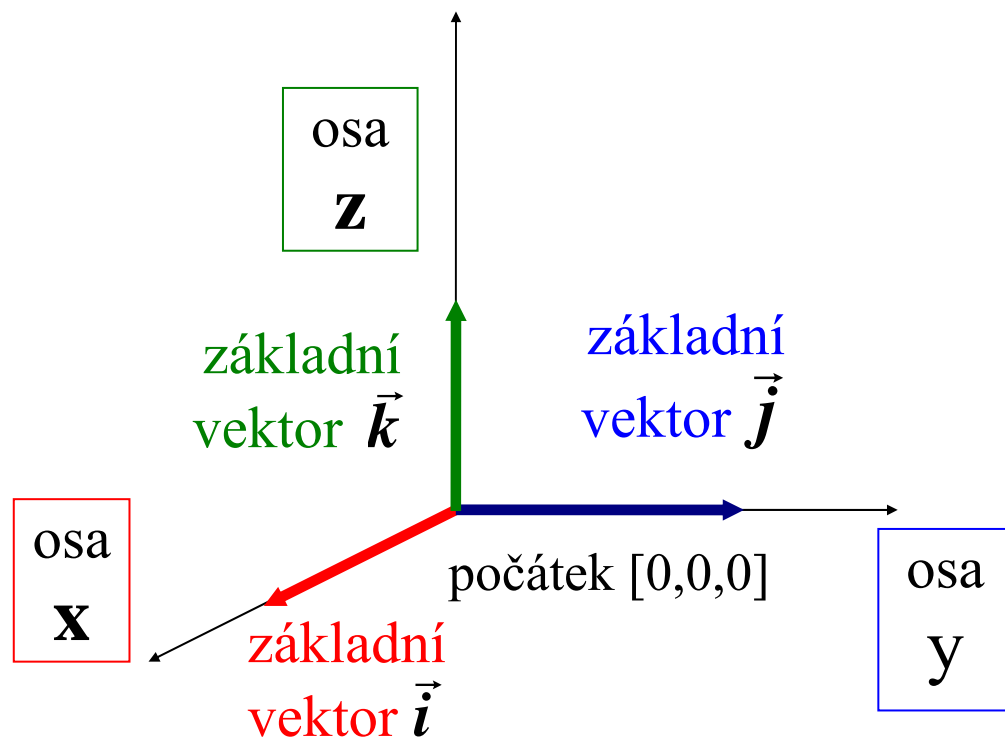
Předmětem mechaniky – *matematický popis* mechanického pohybu v prostoru a v čase a jeho příčiny.

Klasická mechanika – rychlosti těles jsou mnohem menší než rychlost světla ve vakuu

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Mechanický pohyb – změna vzájemné polohy těles v prostoru a čase. Pohyb je relativní – nutno udat vztažné těleso (vztažnou soustavu).

Kartézský souřadný systém



Vztažné soustavy

- ✓ pravoúhlá (kartézská) – souřadnice x, y, z
- ✓ polární: poloměr r , úhel φ
- ✓ cylindrická (válcová): poloměr r , úhel φ , souřadnice z
- ✓ sférická (kulová): poloměr r , úhel φ , úhel \mathcal{G}

Nejčastěji se používá tzv. **laboratorní soustava**

tj. pravotočivá kartézská soustava pevně spojená se Zemí).

MECHANIKA

```
graph LR; A[MECHANIKA] --> B[Popis pohybu v prostoru a čase bez uvažování příčin pohybu  
KINEMATIKA]; A --> C[Studium příčin pohybu a jeho změn  
DYNAMIKA]; A --> D[Zvláštní část mechaniky:  
STATIKA  
(pohyb nenastává)];
```

Popis pohybu v prostoru a čase
bez uvažování příčin pohybu

KINEMATIKA

Studium příčin pohybu a jeho změn

DYNAMIKA

Zvláštní část mechaniky:

STATIKA

(pohyb nenastává)

KINEMATIKA

Idealizace **Hmotný bod** (HB – fiktivní objekt)

- ✓ rozměry tělesa jsou v daných souvislostech zanedbatelně malé (lze je zanedbat vzhledem např. k uražené dráze)
- ✓ rotační pohyb lze zanedbat
- ✓ těleso nepodléhá deformaci

Abychom mohli jednoznačně určit polohu tělesa a změnu této polohy, musíme znát v každém okamžiku **základní kinematické veličiny**, tj. jeho

- ✓ polohu (polohový vektor \vec{r})
- ✓ rychlost \vec{v} ,
- ✓ zrychlení \vec{a}

Základní kinematické veličiny

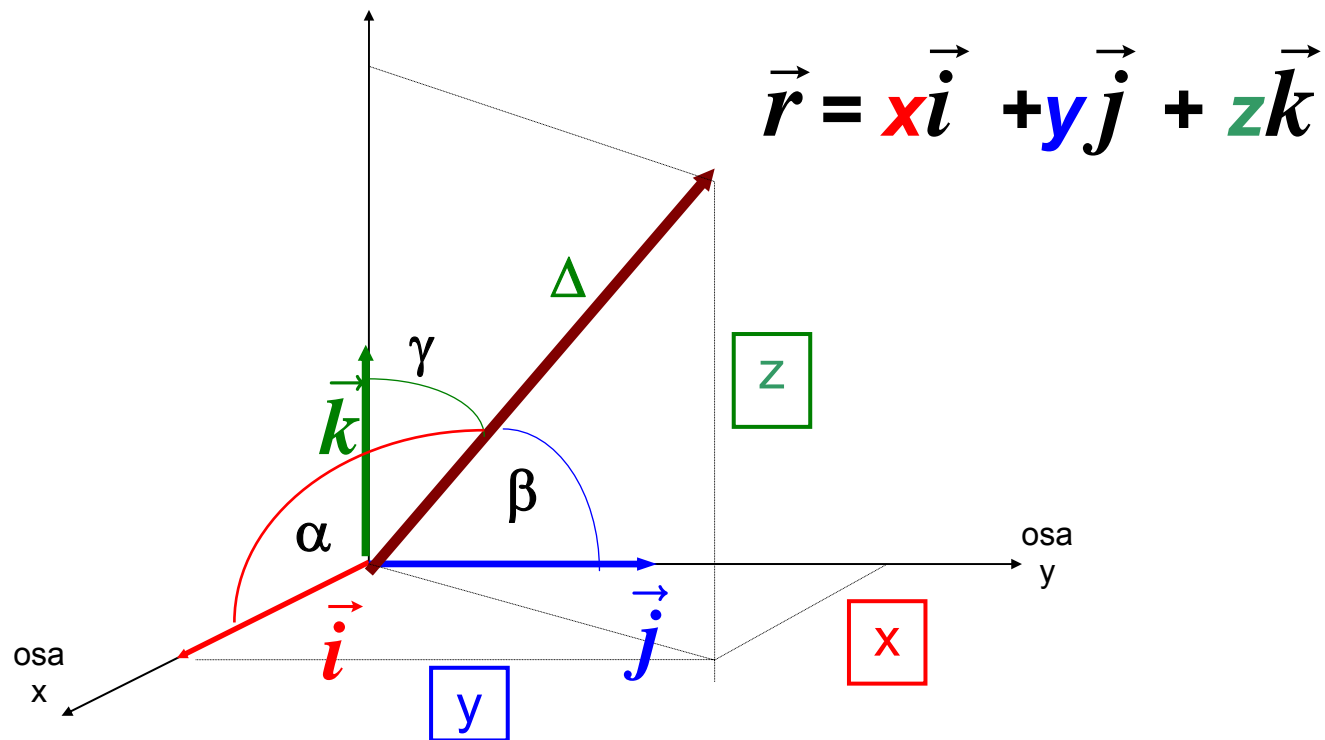
- ① (okamžitý) polohový vektor \vec{r}
- ② okamžitá rychlost \vec{v}
- ③ okamžité zrychlení \vec{a}

Vedlejší kinematické veličiny

- ④ vektor elementárního úhlového otočení
- ⑤ vektor úhlové rychlosti
- ⑥ vektor úhlového zrychlení

① Polohový vektor

Definice



Velikost polohového vektoru

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Směrové kosiny polohového vektoru – $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$

Pro směrové kosiny platí

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} \quad , \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{r}|} \quad , \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{r}|}$$

přičemž

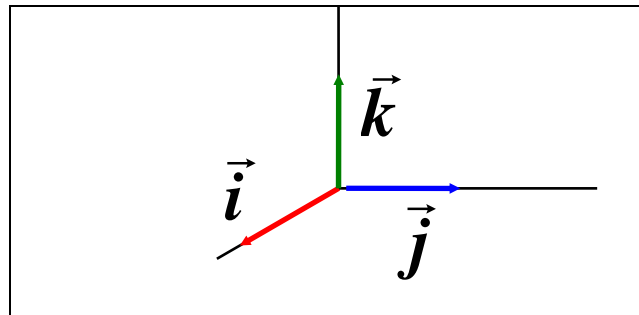
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 .$$

Základní vektory

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

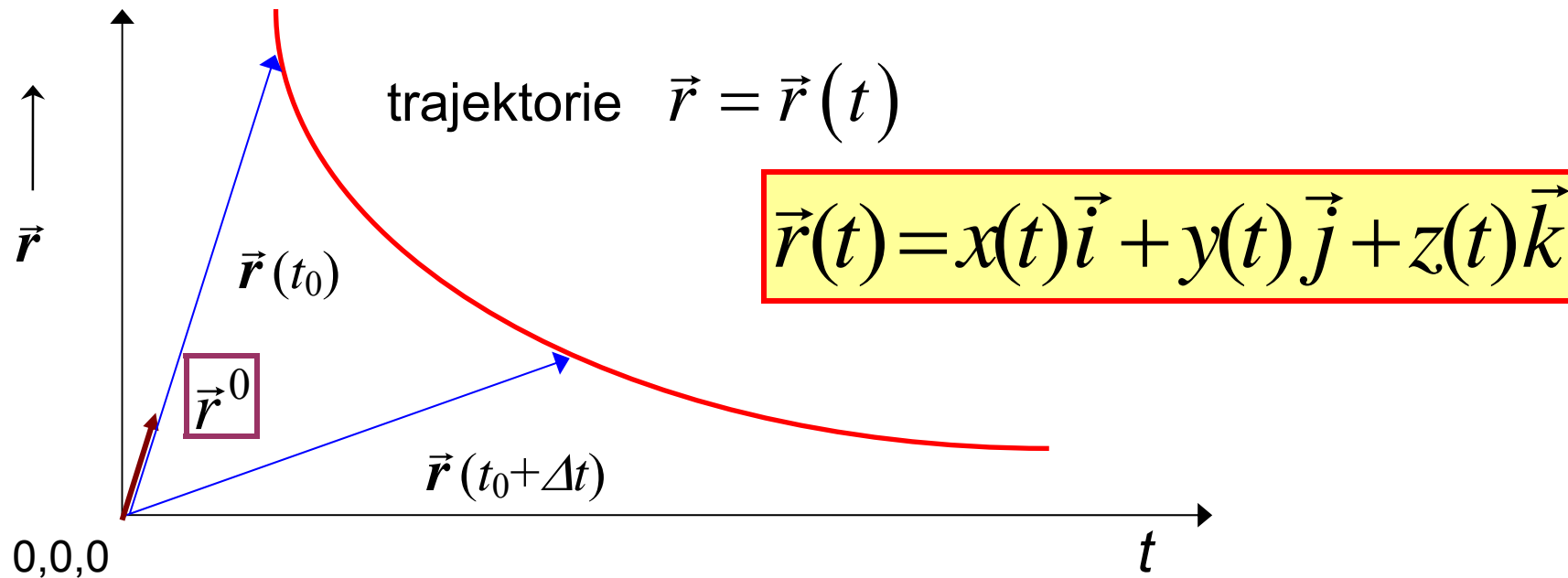


Vektor \vec{i} : $\cos \alpha = 1$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 0$

Vektor \vec{j} : $\cos \alpha = 0$, $\cos \beta = 1$, $\cos \gamma = 0$

Vektor \vec{k} : $\cos \alpha = 0$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 1$

Trajektorie – množina koncových bodů polohového vektoru
– znázorněna **červeně**. Délka trajektorie – **dráha** $s = s(t)$.



Polohový vektor \vec{r} : **počátek** vždy v počátku soustavy souřadnic,
konec na trajektorii ve sledovaném bodě.
Může se „natáhnout“ na neomezenou délku.

Jednotkou dráhy i velikosti polohového vektoru je metr (m).

Parametrické rovnice trajektorie

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

například:

$$x = 2t$$

$$y = 3t^2$$

$$z = 4t$$

Vyloučením času (tj. parametru) obdržíme tvar křivky $y = f(x, z)$, po které se HB pohybuje.

Okamžitou polohu HB můžeme tedy popsat **třemi skalárními rovnicemi, nebo jednou vektorovou**

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

například:

$$\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 4t\vec{k}$$

Příklad 1

Polohový vektor tělesa v pohybu je dán vztahem

$$\vec{r}(t) = (3,6t + 4,2)\vec{i} + (5,4t)\vec{j} \quad [\text{SI}].$$

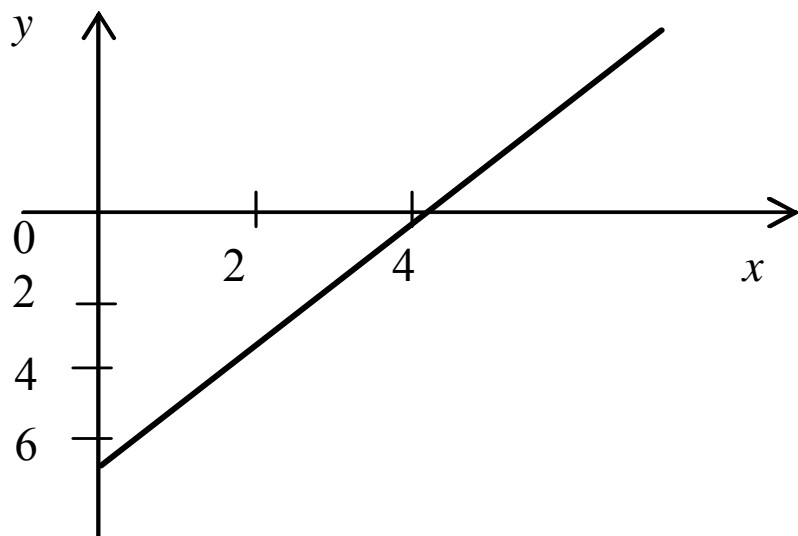
Určete tvar trajektorie.

Řešení:

Pohyb se děje v rovině xy . Složky polohového vektoru jsou

$$(1) \quad x = 3,6t + 4,2$$

$$(2) \quad y = 5,4t$$



Z rovnice (1) vyjádříme čas: $t = \frac{x - 4,2}{3,6}$

a dosadíme do rovnice (2).

Po úpravě obdržíme: $\underline{\underline{y = 1,5x - 6,3}}$.

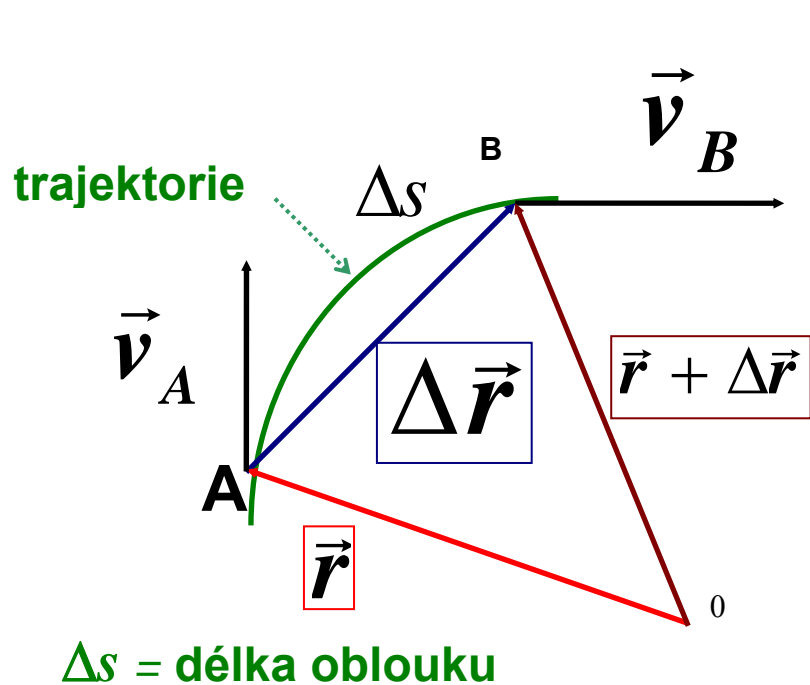
To je rovnice přímky, jejíž směrnice je 1,5.

Úsek na ose y je - 6,3 m.

② Okamžitá rychlost Definice

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Okamžitá rychlost je derivace polohového vektoru podle času



Střední rychlost \vec{v}_{AB} mezi body A, B

$$|\vec{v}_{AB}| = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$$

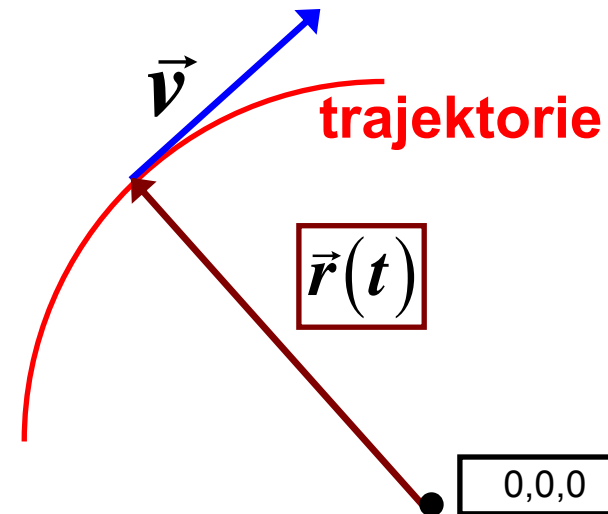
Limitní přechod: $B \rightarrow A$, potom $\Delta t \rightarrow 0$,

střední rychlost \vec{v}_{AB} \rightarrow **okamžitá rychlost** \vec{v}

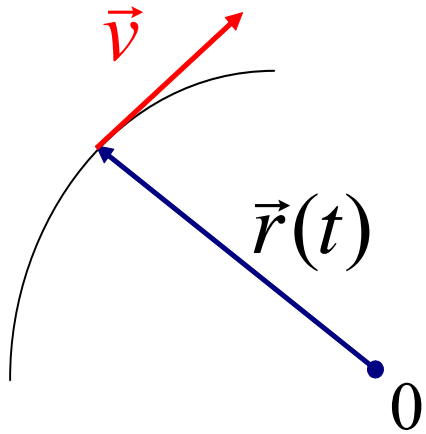
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{AB} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Okamžitá rychlost je derivace polohového vektoru podle času

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$



Vektor rychlosti má směr tečny ke trajektorii a jeho orientace odpovídá rostoucím hodnotám času t .



Vektor okamžité rychlosti má tedy **směr tečny** a jeho **velikost** má význam dráhy uražené za jednotku času.

Složky vektoru rychlosti:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \underline{\underline{v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}}},$$

velikost rychlosti

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Jednotkou rychlosti je metr za sekundu ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)

Pozn.

Sledujme pouze **velikosti** okamžité rychlosti :

$$v = |\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{\overbrace{d\vec{r}}^{ds}}{dt} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

tedy : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ ale $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$

Příklad 2

Poloha elektronu je dána vztahem $\vec{r} = 3,0t\vec{i} - 4,0t^2\vec{j} + 2,0\vec{k}$. a) Určete časovou závislost rychlosti elektronu $\vec{v}(t)$. b) Jakou rychlost má elektron v okamžiku $t = 2,0$ s? Výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů. c) Určete velikost rychlosti v tomto okamžiku.

Řešení:

a) Časovou závislost rychlosti elektronu $\vec{v}(t)$ získáme derivací polohového vektoru \vec{r}

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(3,0t\vec{i} - 4,0t^2\vec{j} + 2,0\vec{k}) \text{ m.s}^{-1} = \underline{\underline{(3,0\vec{i} - 8,0t\vec{j}) \text{ m.s}^{-1}}}$$

b) V čase $t = 2$ s má elektron rychlost

$$\vec{v}_{(t=2)} = 3,0\vec{i} - (8,0 \cdot 2,0)\vec{j} = \underline{\underline{(3,0\vec{i} - 16,0\vec{j}) \text{ m.s}^{-1}}}$$

c) Velikost rychlosti elektronu v čase $t = 2$ s

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{3,0^2 + 16,0^2} = \underline{\underline{16 \text{ m.s}^{-1}}}$$

Typické hodnoty některých rychlostí $|\vec{v}|$

Šíření elektromagnetických vln ve vakuu	3×10^8 m/s
Orbitální rotace Země kolem Slunce	$29,8 \times 10^3$ m/s
Zvuk ve vzduchu	332 m/s
Automobil na dálnici	45 m/s
Lidská chůze (průměrná hodnota)	1,2 m/s
Vodivostní elektron v kovu (v_{drift})	$\approx 0,001$ m/s

③ Okamžité zrychlení

Mění-li vektor rychlosti buď velikost nebo směr (případně obojí najednou), pak říkáme, že se těleso pohybuje se zrychlením.

Změna vektoru rychlosti v čase → okamžité zrychlení

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \quad \rightarrow \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

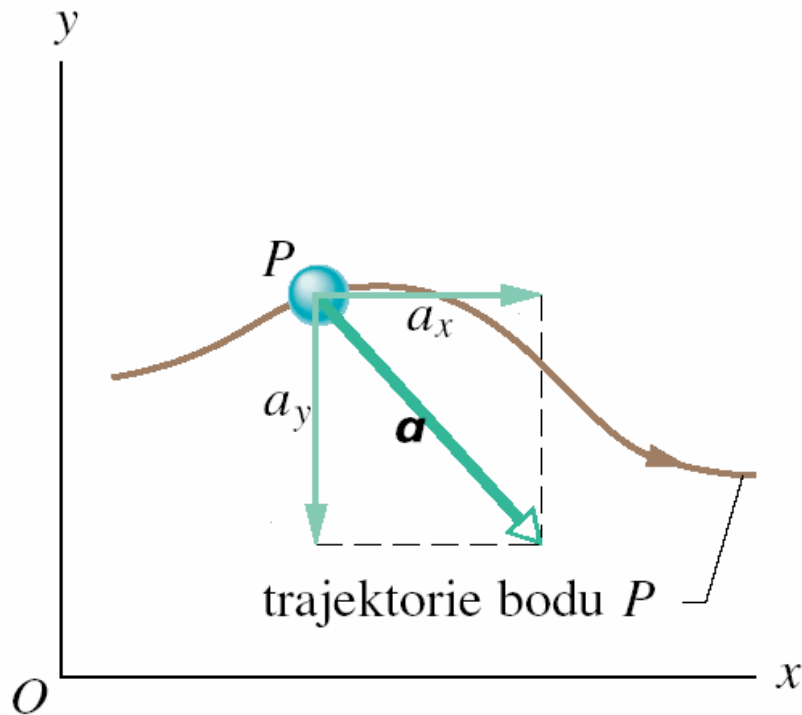
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \text{kde} \quad a_x = \dot{v}_x, \quad a_y = \dot{v}_y, \quad a_z = \dot{v}_z.$$

nebo jinak

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k}$$

Jednotkou zrychlení je $(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$.

Vektor zrychlení nemá při pohybu částice po své trajektorii žádný význačný nebo specifický směr.



Obecně

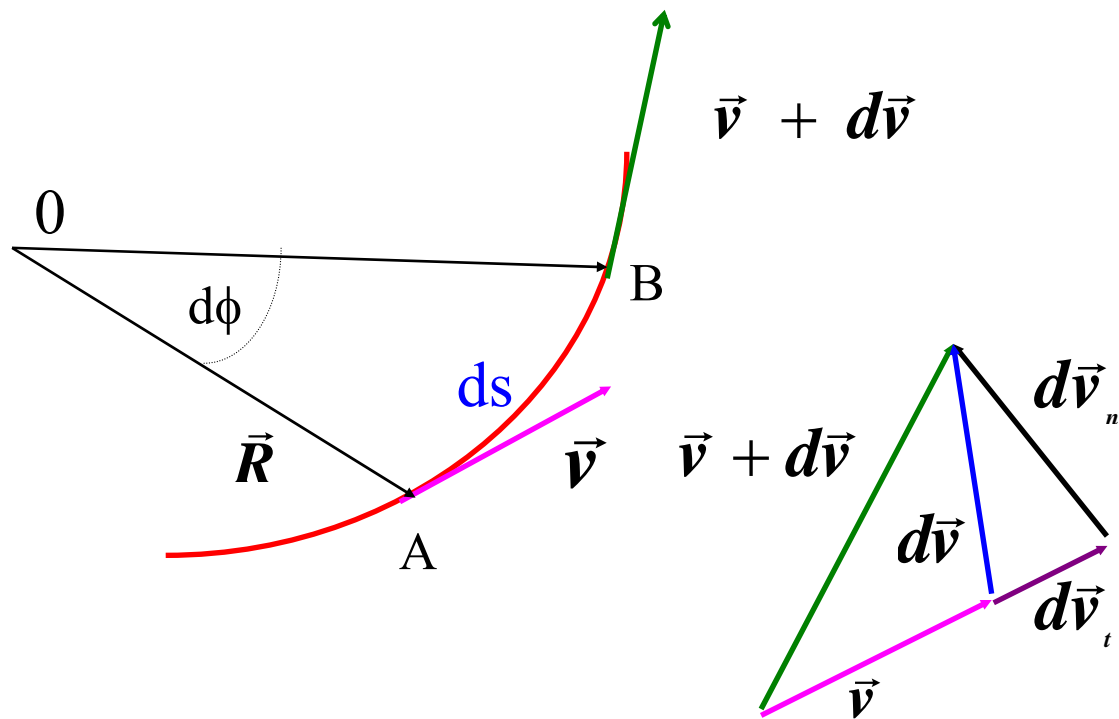
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Obr.: **Rozklad okamžitého zrychlení při pohybu částice v rovině xy**

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

Uděláme rozklad vektoru zrychlení \vec{a} do dvou jiných, také navzájem kolmých ale mnohem názornějších směrů.

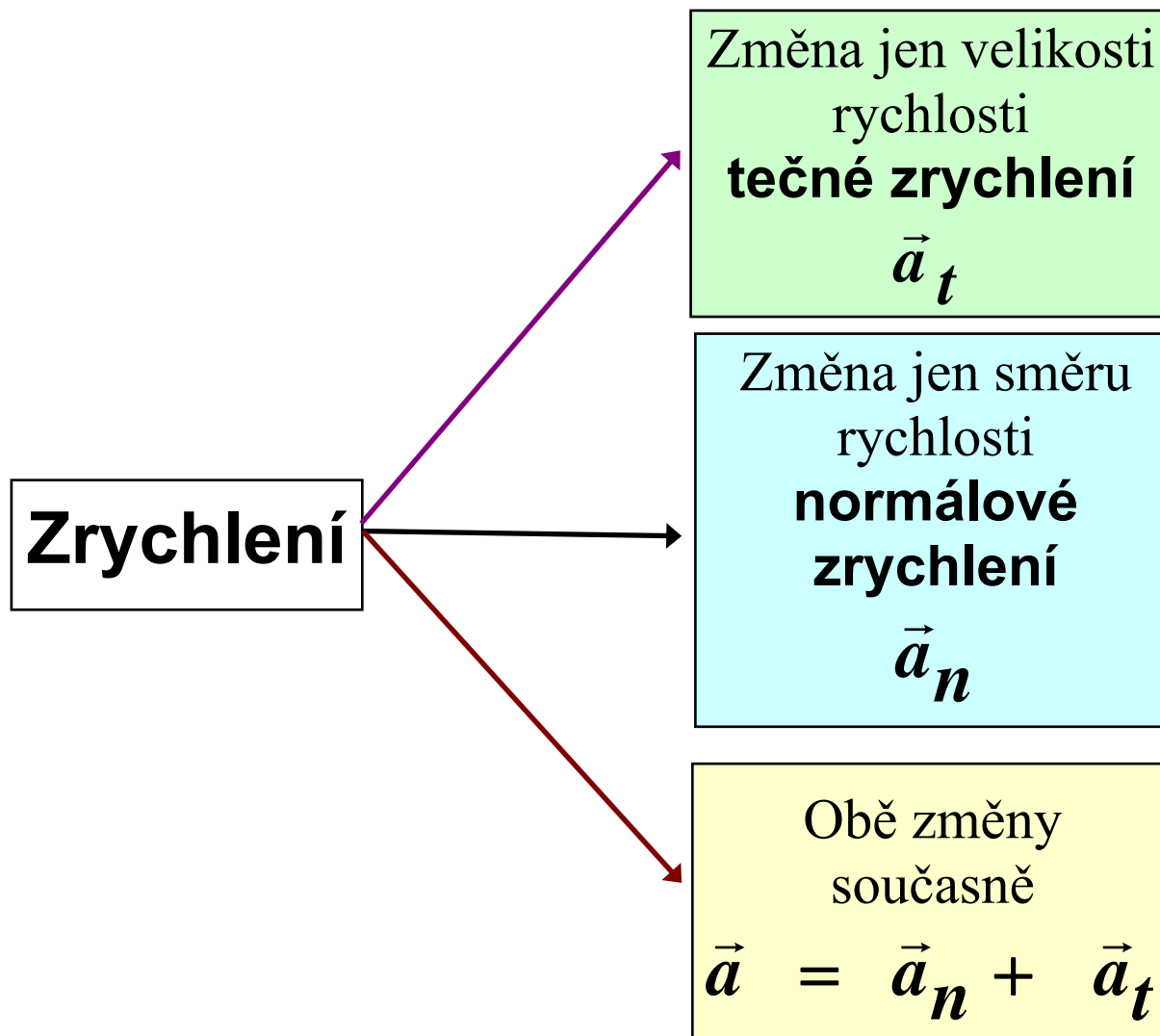
Zvolíme směr tečny k trajektorii a směr kolmice (normály) k této tečně. Tato normála směřuje do středu oblouku, který trajektorie v bodě P tvoří.



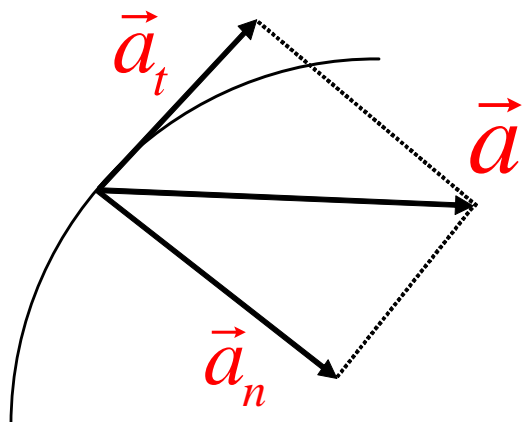
Vektor $d\vec{v}$

nemá žádný specifický směr
ve vztahu k polohovému vektoru \vec{R}

Jestliže se mění :	pak vektor $d\vec{v}$ má směr :
pouze velikost rychlosti \vec{v}	tečny k trajektorii \Rightarrow tečné zrychlení \vec{a}_t
pouze směr rychlosti \vec{v} ,	normály k trajektorii \Rightarrow normálové zrychlení \vec{a}_n



Obecný (křivočarý) pohyb



\vec{a}_t – tečné zrychlení, \vec{a}_n – normálové zrychlení

Celkové zrychlení je dáno vztahem

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

velikost zrychlení je

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

velikosti složek

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

kde R je poloměr **oskulační kružnice**.

Shrnutí

- ✓ **rychlost** má směr tečny k trajektorii
 - ✓ **tečná složka zrychlení** a_t určuje **změnu velikosti rychlosti** za jednotku času
 - ✓ **normálová složka zrychlení** a_n ($a_n \geq 0$) závisí na poloměru křivosti dráhy
 \Rightarrow souvisí se **změnou směru pohybu**. Směřuje **do středu křivosti dráhy**, takže i celkové zrychlení \vec{a} směřuje dovnitř zakřivení.
-

Je-li zrychlení $\vec{a} \neq \vec{0}$ a

✓ mění se **jen velikost** rychlosti, pak

$$\vec{a} = \vec{a}_t$$

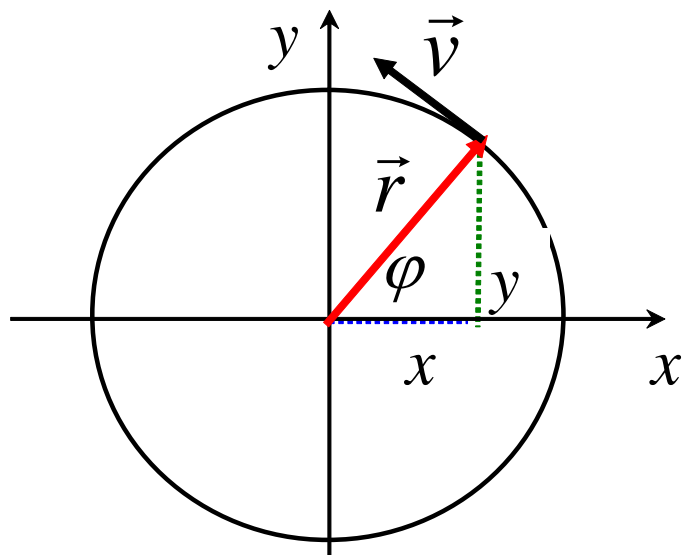
✓ mění se **jen směr** rychlosti, pak

$$\vec{a} = \vec{a}_n$$

✓ mění se **velikost i směr** rychlosti, pak

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Kruhový pohyb – pohyb v rovině – 2D problém



Pro popis tohoto pohybu jsou vhodné
polární souřadnice:

$$r (= konst.) \text{ a } \varphi(t)$$

Vztah k souřadnicím kartézským

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

Polohový vektor

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = (r \cos \varphi)\vec{i} + (r \sin \varphi)\vec{j}$$

Rovnoměrný pohyb kruhový – úhlová dráha φ narůstá rovnoměrně

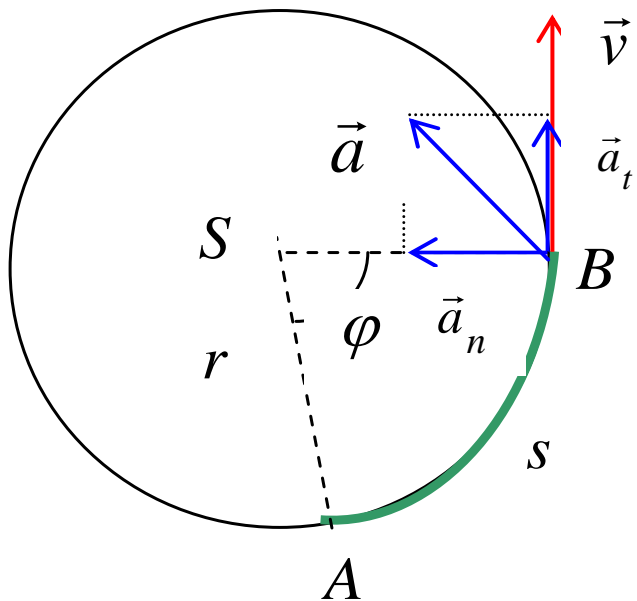
s časem

$$\varphi = \omega t$$

(ω je velikost úhlové rychlosti otáčení)

Polohový vektor:

$$\vec{r}(t) = (r \cos \omega t)\vec{i} + (r \sin \omega t)\vec{j}$$



Délka oblouku s:

$$s = r\varphi$$

Obvodová rychlost \vec{v} :

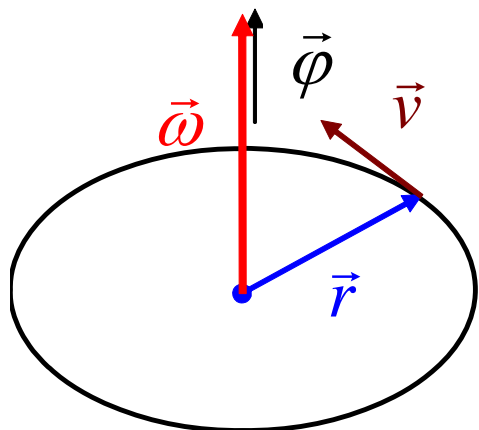
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = [(-r\omega \sin \omega t)\vec{i} + (r\omega \cos \omega t)\vec{j}]$$

Její velikost:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{r^2\omega^2 \sin^2 \varphi + r^2\omega^2 \cos^2 \varphi}$$

$$v = r\omega .$$

Vektorově



$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Obvodová rychlost \vec{v} je vektor, který má směr **tečny** k trajektorii.

$$\vec{v} \perp \vec{\omega} \perp \vec{r}$$

Poznámka:

Při vektorovém popisu kruhového pohybu leží **vektory** veličin

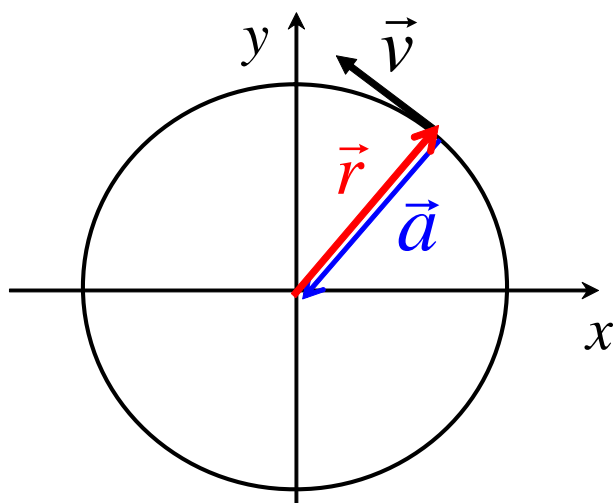
- ✓ úhlová dráha $\vec{\varphi}$,
- ✓ úhlová rychlost $\vec{\omega}$
- ✓ úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon}$

! v ose otáčení !

Zrychlení

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[(-r\omega^2 \cos \omega t) \vec{i} + (-r\omega^2 \sin \omega t) \vec{j} \right]$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$



Zrychlení \vec{a} má směr do středu kružnice \Rightarrow
název **dostředivé zrychlení**

Velikost zrychlení:

$$a_n = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} \quad (\text{poněvadž } v = \omega r),$$

$$a_t = 0 \quad (\text{poněvadž velikost rychlosti} = \text{konst.})$$

Perioda = doba jednoho oběhu

Platí $\varphi = \omega t$.

Pro $t = T$ je $\varphi = 2\pi$. Po dosazení do předchozí rovnice obdržíme

$$2\pi = \omega T \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \quad [T] = \text{s}$$

Frekvence (počet oběhů za sekundu) = převrácená hodnota periody

$$f = \frac{1}{T} \quad [f] = \text{s}^{-1} = \text{Hz}$$

Spojením těchto rovnic dostaneme

$$\omega = 2\pi f \quad [\omega] = \text{s}^{-1} .$$

Základní druhy pohybů

přímočarý rovnoměrný $a_n = 0, a_t = 0$

přímočarý rovnoměrně zrychlený (zpomalený) $a_n = 0, a_t = konst. \neq 0$

přímočarý nerovnoměrný $a_n = 0, a_t \neq 0$

křivočarý rovnoměrný $a_n \neq 0, a_t = 0$

kruhový rovnoměrný $a_n = konst. \neq 0, a_t = 0$

křivočarý nerovnoměrný $a_n \neq 0, a_t \neq 0$

DVĚ ÚLOHY KINEMATIKY

1. úloha

Máme dán polohový vektor $\vec{r}(t)$, odtud

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \xrightarrow{\text{derivace}} \vec{v} = \vec{v}(t) \xrightarrow{\text{derivace}} \vec{a} = \vec{a}(t)$$

Úloha je triviální a jednoznačná.

2. úloha

Známe vektor zrychlení $\vec{a}(t)$, odtud

$$\vec{a}(t) \xrightarrow{\text{integrace}} \vec{v} = \vec{v}(t) \xrightarrow{\text{integrace}} \vec{r} = \vec{r}(t)$$

Musíme znát počáteční (okrajové) podmínky.

Aplikace 2. úlohy

1) Pohyb s konstantním zrychlením (tj. přímočarý rovnoměrně zrychlený)

$$\vec{a} = konst. \quad (1)$$

a) Hledáme rychlost

Z definice

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt \Rightarrow \vec{v} = \int \vec{a} dt \quad (\text{neurčitý integrál})$$

Po integraci obdržíme

$$\vec{v} = \vec{a}t + C_1, \quad \text{kde } C_1 \text{ je integrační konstanta (libovolná).}$$

Pro $t = 0$ s pak

$$\vec{v}(t = 0) = \underbrace{\vec{a}t}_{=0} + C_1 \Rightarrow C_1 = \vec{v}_0$$

Konstanta C_1 má význam rychlosti v čase $t = 0$ s a vztah zapíšeme

$$\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0 \quad (2)$$

b) Hledáme polohový vektor \vec{r} .

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\vec{r} = \vec{v} dt \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \int \vec{v} dt \quad (\text{neurčitý integrál})$$

Po dosazení za \vec{v} z rovnice (2) a následné integraci dostaneme

$$\vec{r} = \int \vec{v} dt = \int (\vec{a}t + \vec{v}_0) dt = \int \vec{a}t dt + \int \vec{v}_0 dt = \frac{\vec{a}t^2}{2} + \vec{v}_0t + C_2,$$

kde C_2 je integrační konstanta (libovolná).

Pro $t = 0$ s

$$\vec{r}(t = 0) = \underbrace{\frac{1}{2}\vec{a}t^2}_{=0} + \underbrace{\vec{v}_0t}_{=0} + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \vec{r}_0$$

Konstanta C_2 má význam polohového vektoru v čase $t = 0$ s a vztah zapíšeme

$$\boxed{\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{r}_0} \quad (3)$$

2) Pohyb s konstantní rychlostí (tj. přímočarý rovnoměrný)

$$\vec{v} = konst.$$

Zrychlení je v tomto případě $\vec{a} = 0$, protože $\vec{a} = \frac{d\vec{v}_{konst}}{dt} = 0$

Hledáme pouze polohový vektor \vec{r} .

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\vec{r} = \vec{v} dt \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \int \vec{v} dt \quad (\text{neurčitý integrál})$$

Po integraci obdržíme

$$\vec{r} = \vec{v}t + C, \quad \text{kde } C \text{ je integrační konstanta (libovolná).}$$

Pro $t = 0$ s pak

$$\vec{r}(t = 0) = \vec{r}_0 = \underbrace{\vec{v}t}_0 + C \quad \Rightarrow \quad C = \vec{r}_0$$

Konstanta C má význam počáteční rychlosti tj. rychlosti v čase $t = 0$ s.

Pro polohový vektor dostáváme

$$\vec{r} = \vec{v}t + \vec{r}_0$$

Shrnutí Aplikace 2. úlohy

1) Pohyb s konstantním zrychlením (tj. přímočarý rovnoměrně zrychlený)

$$\vec{a} = \textit{konst.}$$

$$\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0$$

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{r}_0$$

Protože jde o pohyb po přímce (1D) mají vektory \vec{a} , \vec{v} , \vec{r} shodný směr a navíc platí $|\vec{r}| = s$, můžeme použít jen velikosti veličin

$$a = \textit{konst.}$$

$$v = at + v_0$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

2) Pohyb s konstantní rychlostí (tj. přímočarý rovnoměrný)

$$\vec{a} = 0$$

$$\vec{v} = \textit{konst.}$$

$$\vec{r} = \vec{v}t + \vec{r}_0$$

Analogicky pro velikosti veličin

$$a = 0$$

$$v = \textit{konst.}$$

$$s = vt + s_0$$

Poznámky

- ✓ Pokud jsou vektory rovnoběžné $\vec{r} \parallel \vec{v} \parallel \vec{a}$ (ať už souhlasně nebo nesouhlasně), jedná se o **pohyb přímočarý**.
- ✓ Mají-li různý směr \rightarrow **křivočaré pohyby**.
- ✓ Každá z vektorových rovnic (1), (2) a (3) se dá nahradit třemi skalárními rovnicemi.
- ✓ Rozklad pohybů do zvolených směrů (např. do směrů os x, y, z).
- ✓ Princip nezávislosti pohybů.
- ✓ Pohyb tělesa (hmotného bodu) v tíhovém Zemském poli (**v prvním počítačovém cvičení**)