10 Tíhové zrychlení

ÚKOL

Stanovte lokální tíhové zrychlení pomocí měření reverzním kyvadlem.

TEORIE

ZÁKLADNÍ POJMY

Tíhové zrychlení g je zrychlení volného pádu ve vakuu. Jednotkou tíhového zrychlení je ms^{-2}. Pokud budeme vyšetřovat velikost tíhového zrychlení v blízkém okolí Země (pod povrchem, na povrchu a nad povrchem), musíme mít na paměti, že hlavními složkami síly, která toto zrychlení způsobuje, je síla gravitační (Newtonův gravitační zákon) a síla odstředivá (rotace Země). Tíhové zrychlení u povrchu země je ovlivňováno Měsícem (příliv a odliv), jeho velikost je závislá i na nadmořské výšce a zeměpisné šířce (na rovníku je velikost tíhového zrychlení menší než na pólech). Tíhové zrychlení není tedy konstanta, ale závisí na místě, kde je měřeno.

Těžiště tuhého tělesa je bod, v němž se v homogenním tíhovém poli protínají těžnice příslušející různým bodům, v nichž těleso zavěsíme. Těžnice v tíhovém poli Země je svislá přímka procházející bodem zavěšení. V této přímce leží také vektor tíhy tělesa.

Hmotný střed tuhého tělesa je bod, který je pevně určen tvarem tělesa a rozložením hustoty. Souřadnice hmotného středu jsou určeny matematickými vztahy. Jeho existence nezávisí na přítomnosti vnějšího silového pole.

V homogenním tíhovém poli (např. v těsné blízkosti zemského povrchu) těžiště a hmotný střed tělesa splývají v jednom bodě. Oba pojmy se proto velmi často používají jako synonyma. V nehomogenním tíhovém poli je však nutno oba pojmy rozlišovat. Pojem těžiště navíc ztrácí svůj význam v beztížném stavu, kde na těleso nepůsobí tíhová síla. Student diskutující pod nickem o.neill to na webu http://forum.matweb.cz/viewtopic.php?id=31742 vysvětluje takto: „Těžiště je to, co na Zemi zjistíme třeba zavěšováním tělesa, kdežto hmotný střed je bod, jehož polohu můžeme spočítat na základě znalosti rozložení hustoty v tělese. V homogenním gravitačním poli oba body splývají, nacházíme-li se mimo gravitační pole, nedá se hovořit o tíze (nejde nic zavěšovat, tělesa nikam nepadají) a tudy ani o těžišti. V silně nehomogenním poli je to něco jiného. Např. kdybychom měli homogenní dlouhou tyč ze země do vesmíru, pak by hmotný střed byl v půlce, ale těžiště blíže k Zemi."

Kyvadlo je libovolné těleso, které se může otáčet kolem pevné vodorovné osy, jež neprochází jeho těžištěm. Při vychýlení z rovnovážné polohy koná takové těleso kývavý pohyb.

Fyzické kyvadlo. Tímto názvem je označováno kyvadlo na něž jsou aplikovány tři zjednodušující podmínky. Předpokládáme, že těleso tvořící fyzické kyvadlo je tuhé, otáčení kolem osy je bez tření a okolní prostředí pohyb kyvadla nijak nebrzdí. Těžiště fyzického kyvadla se při kývání pohybuje po části kruhové trajektorie se středem v ose otáčení. Při kývání se navzájem mění potenciální energie kyvadla na kinetickou energii rotačního pohybu a ta zase zpátky na energii potenciální.

Doba kmitu (perioda) T fyzického kyvadla je **pro malý rozkyv** (asi do 5°) určena vztahem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg\ell}}\ , \tag{10.1}$$

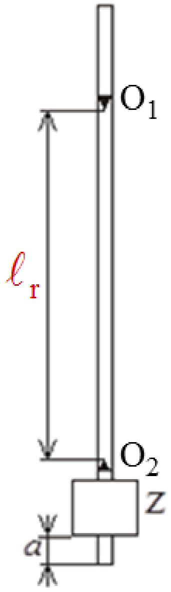
kde J je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose kývání – $[J]=\mathrm{kg.m^2}$, m je hmotnost kyvadla a ℓ je vzdálenost osy kyvu od těžiště kyvadla.

Matematické kyvadlo je matematické vyjádření myšlenkového modelu, který kyvadlo maximálně zjednodušuje. Zkoumá se pouze pohyb hmotného bodu zavěšený na tenkém nedeformovatelném vlákně se zanedbatelnou hmotností. Není proto nutné uvažovat odpor prostředí ani tření vlákna v závěsu. Hmotný bod, vlákno i závěs leží neustále ve svislé pevné rovině. Doba kmitu (perioda) T matematického kyvadla **při malých rozkyvech** (asi do 5°) závisí na jeho délce ℓ a tíhovém zrychlení podle vztahu:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \, . \qquad (10.2)$$

Všimněte si, že doba kmitu nezávisí na hmotnosti kývajícího se hmotného bodu. Redukujeme-li těleso na pouhý bod, je jeho těžiště právě v tomto bodě. Je tedy délka ℓ matematického kyvadla. také vzdáleností osy kyvu od těžiště tohoto kyvadla.

TEORIE MĚŘENÍ POMOCÍ REVERZNÍHO KYVADLA



Obr. 10.1

Reverzní kyvadlo[1] je fyzické kyvadlo tvořené kovovou tyčí se dvěma osami O_1, O_2 (obr. 10.1), které tvoří pevné břity obrácené ostřím k sobě. Kyvadlo lze převracet a nechat kývat kolem jedné nebo druhé osy. Na tyči je možno posunovat závažím Z a měnit tak jeho vzdálenost a od konce tyče. Tím se mění poloha těžiště a tedy i doby kmitu kyvadla kolem os O_1, O_2.

Reverzním kyvadlem měříme tíhové zrychlení na základě následující úvahy: Protože jde o kyvadlo fyzické je jeho doba kmitu pro malý rozkyv určena vztahem (10.1), tj. $(T = 2\pi\sqrt{J/mg\ell})$. Hodnoty momentu setrvačnosti J a vzdálenosti ℓ osy kyvu od těžiště nemáme obvykle k dispozici, takže použití vztahu (10.1) k výpočtu tíhového zrychlení g je nevhodné. Za určitých podmínek lze však použít mnohem jednodušší vztah pro kyvadlo matematické (10.2), tj. $(T = 2\pi\sqrt{\ell/g})$.

Délka matematického kyvadla ℓ_r, které kývá se stejnou dobou kmitu jako používané fyzické kyvadlo, se nazývá **redukovaná délka** tohoto fyzického kyvadla

Určíme-li redukovanou délku našeho fyzického kyvadla ℓ_r a jeho dobu kmitu T, můžeme pro výpočet tíhového zrychlení použít vztah (10.2), tj. $(T = 2\pi\sqrt{\ell_r/g})$ místo vztahu (10.1).

Z (10.2) obdržíme
$$g = \frac{4\pi^2 \ell_r}{T^2} \, . \qquad (10.3)$$

Zde je ℓ_r již redukovaná délka našeho reverzního kyvadla.

Obraťme pozornost ke kyvadlu, které budeme používat. Redukovanou délkou ℓ_r je zde pevná vzdálenost mezi břity, které jsou osami kývání O_1 a O_2. Aby se předem daná vzdálenost mezi břity stala redukovanou délkou, využijeme následující skutečnost. Lze dokázat, že u každého fyzického kyvadla je možné najít dvě různé osy kývání, které mají stejnou dobou kmitu. Vzdálenost mezi těmito osami je rovna redukované délce ℓ_r použitého fyzického kyvadla. Posouváním závaží měníme polohu těžiště reverzního kyvadla a měříme dobu kmitu kolem obou os. Hledáme takovou polohu závaží při níž je doba kmitu kolem obou os stejná, tj. $T_1 = T_2$. Závaží pak umístíme do této polohy. Vytvoříme tak kyvadlo jehož pevná vzdálenost břitů je nyní redukovanou délkou našeho reverzního kyvadla.

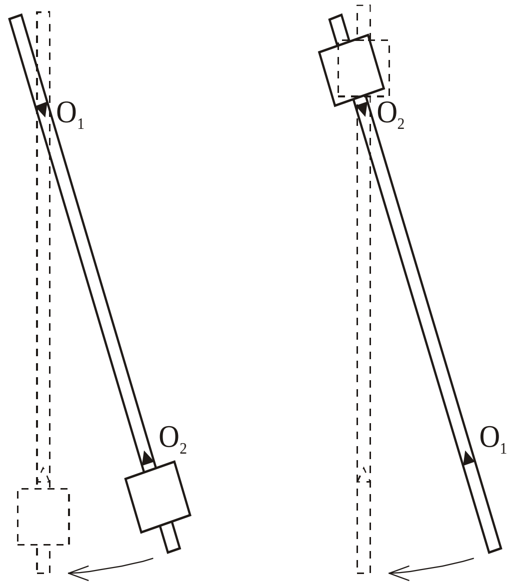
[1] to reverse = obrátit, převrátit

Doba kmitu se měří pomocí optické závory, která je připojena k počítači prostřednictvím rozhraní RS 232. Signály pro spuštění, počítání kmitů a ukončení měření jsou odvozeny od přerušování světelného paprsku snímače průchodem kyvadla. Snímač je tvořen dvěma fixovanými tubusy. V jednom je uložen zdroj záření, ve druhém detektor s elektronikou.

Ovládací program *Kmit verze 3.06* se spouští poklepáním na příslušnou ikonu na ploše.

POSTUP PŘI MĚŘENÍ, ZPRACOVÁNÍ A VYHODNOCENÍ

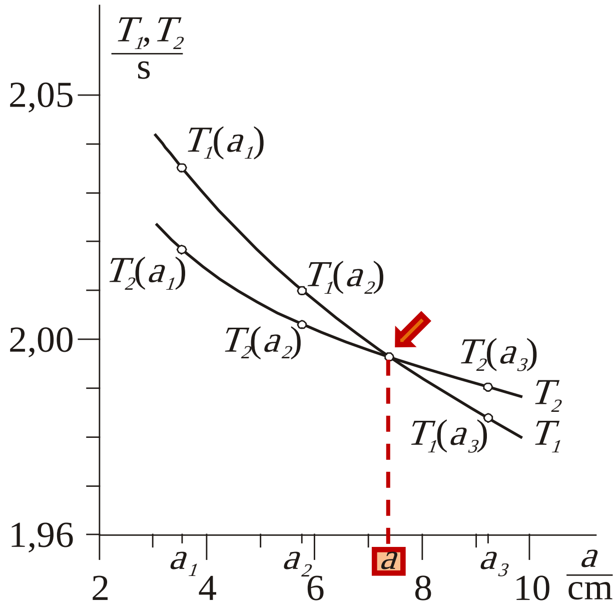
1. Vyjměte ocelovou tyč (kyvadlo) ze závěsu. Ocelovým měřítkem (s cm a mm dělením) změřte 10krát vzdálenost ℓ_r mezi osami O_1, O_2. Měření zpracujte obvyklým způsobem (Úvod do měření, kap. 00-6).
2. Nyní budete hledat takovou polohu závaží *Z*, při níž je vzdálenost mezi pevnými osami O_1 a O_2 právě redukovanou délkou použitého reverzního kyvadla. Pracovní obrazovka programu *Kmit* vám nabídne volbu nejméně tří a nejvíce pěti vzdáleností a_i od konce kyvadla po dolní hranu závaží (obr. 10.1). Vzdálenosti a_i měřte posuvným měřítkem. Spusťte měření doby kmitu $20T_1(a_i)$ pro osu O_1 a $20T_2(a_i)$ pro osu O_2 (obr. 10.2).



Obr. 10.2

Polohy závaží a_i volte rovnoměrně od konce tyče k břitu. Poblíž břitu však volte poslední vzdálenost tak, aby se závaží v horní poloze neopíralo při kmitání o závěs. Po naplnění příslušné tabulky daty stiskněte tlačítko *Výpočet*. Na obrazovce se objeví grafy závislosti dvacetinásobku doby kmitu kolem obou os na poloze závaží (získáte graf podobný tomu na obr.10.3, zde jsou však vyneseny hodnoty pouze jednoho kmitu). Grafy musí mít **jeden průsečík** a jejich **průběh musí být monotónní**. Případné chyby odstraňte novým měřením.

3. Průsečík obou závislostí určuje hledanou polohu *a*. Nyní umístěte na reverzním kyvadle závaží co nejpřesněji do zjištěné polohy. Vzdálenost obou os kyvadla by měla být nyní hledanou redukovanou délkou.
4. Pokračujte měřením doby kmitu $T_1(a)$ kolem osy O_1 a $T_2(a)$ kolem osy O_2.



Obr. 10.3

Pro svoje měření i jeho zpracování **použijte postupnou metodu** (Úvod do měření, kap. 00-2 Měřicí metody, str. 00-2/3). Je-li vaše měření správné, nebudou se obě doby kmitu téměř lišit.

5. Ze vztahu (10.3) vypočítejte tíhová zrychlení g_1, g_2 pro T_1, T_2. Určete chyby $\delta(g_1), \delta(g_2)$. Porovnejte vypočítaná g s tabulkovou hodnotou. Bude-li se tabulková hodnota lišit od vypočítaných, pokuste se najít příčinu a zdůvodnit ji.

DODATEK

V testu připravenosti k úloze se objevují i příklady. Jsou to příklady typu:

- Doba kmitu fyzického kyvadla je rovna 4π sekund. Jak velká je jeho redukovaná délka v metrech?

  Postup: Vyjdeme z definice redukované délky:

  „Délka matematického kyvadla, které kývá se stejnou dobou kmitu jako dané fyzické kyvadlo, se nazývá **redukovaná délka** daného fyzického kyvadla.“

  Ze vztahu (10.2) pro dobu kmitu matematického kyvadla vyjádříme délku ℓ, což je hledaná redukovaná délka ℓ_r. Získáme tak vztah (10.3), do kterého dosadíme za *T*.

$$\underbrace{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}_{(10.1)} \Rightarrow \underbrace{\ell_r = \frac{T^2}{4\pi^2}g}_{(10.3)} = \frac{(4\pi)^2}{4\pi^2}g = \frac{16\pi^2}{4\pi^2}g = 4g\,.$$

- Je dáno fyzické kyvadlo o hmotnosti m = 0,6 kg, vzdálenosti bodu závěsu od těžiště ℓ = 0,9 m a dobou kmitu T = 4 s. Tíhové zrychlení g = 9,81 m.s^{-2}. Vypočtěte moment setrvačnosti.

  Postup: Ze vztahu (10.1) pro dobu kmitu fyzického kyvadla vyjádříme moment setrvačnosti *J* a dosadíme.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg\ell}} \quad \Rightarrow \quad J = \frac{T^2}{4\pi^2}mg\ell = \frac{(4\text{s})^2}{4\pi^2}0{,}6\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{ms}^{-2}\cdot 0{,}9\,\text{m} = 2{,}15\,\text{kg.m}^2.$$

  Zadávány jsou různé varianty tohoto příkladu, kdy se počítají hodnoty ostatních proměnných ve vztahu (10,1).

- V souboru *Okruhy látky* … je položena otázka: Změní se redukovaná délka ℓ_r určitého fyzického kyvadla, pokud se změní veličiny *J*, *m* nebo ℓ , avšak doba kmitu zůstane stejná?.

Redukovaná délka určitého fyzického kyvadla je definovaná jako délka takového matematického kyvadla, které kývá **se stejnou dobou kmitu** jako posuzované kyvadlo fyzické. Z této definice plyne, pokud se změní u fyzického kyvadla veličiny *J*, *m* nebo ℓ, tak aby jeho doba kmitu zůstala nezměněna, nezmění se ani doba kmitu, kterou dosazujeme do vztahu pro matematické kyvadlo abychom získali redukovanou délku. Redukovaná délka se tedy nezmění.

$$2\pi\sqrt{\frac{J}{mg\ell}} = \underbrace{T_{\text{Fyzické}} = T_{\text{Matematické}}}_{\substack{\text{Pokud se při určité změně} \\ J,\ m \text{ a } \ell \text{ nemění doba kmitu,} \\ \text{nezmění se ani redukovaná délka } \ell_r}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_r}{g}} \Rightarrow \ell_r \text{ se nezmění}$$